கணிதவியல்

மேல் நிலை – முதலாம் ஆண்டு

தொகுதி – I

பாடநூல் மேம்பாட்டுக் குழுவின் பரிந்துரையின் அடிப்படையில் திருத்தப்பட்டது.

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்
தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்
தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச்சாலை, சென்னை–600 006

மறு பதிப்பு–2005
திருத்திய பதிப்பு–2007

நூலாசிரியர் மற்றும் குழுத்தலைவர்

முனைவர் **K. ஸ்ரீனிவாசன்**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் **A. ரகீம் பாட்சா**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி),
சென்னை – 600 005

முனைவர் **M. சந்திரசேகர்**
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்
சென்னை – 600 025

முனைவர் **T. தமிழ்ச்செல்வன்**
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மனோன்மணீயம் சுந்தரனார்
பல்கலைக்கழகம், திருநெல்வேலி–627 012

நூலாசிரியர்கள்

முனைவர் **E. சந்திரசேகரன்**
விரிவுரையாளர் (முதுநிலை), கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை – 600 005

முனைவர் **C. செல்வராஜ்**
கணித விரிவுரையாளர்
உ.நா. அரசுக் கல்லூரி
பொன்னேரி – 601 204

முனைவர் **P. தேவராஜ்**
கணித விரிவுரையாளர்
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்
சென்னை – 600 025

திரு **R. சுவாமிநாதன்**
முதல்வர்
அழகப்பா மெட்ரிகுலேஷன்
மேனிலைப் பள்ளி, காரைக்குடி – 630 003

திரு **T.M. சௌந்தரராஜன்**
தலைமை ஆசிரியர்
ஸ்ரீ அஹோபில மடம் ஓரியண்டல்
மேனிலைப்பள்ளி, சென்னை–600 033

திரு **D. முருகேசன்**
உதவித் தலைமையாசிரியர்
அரசினர் மேனிலைப் பள்ளி
கோடம்பாக்கம், சென்னை–600 024

திரு **N. ராஜேந்திரன்**
முதுகலை கணித பாட ஆசிரியர்
லேடி வெலிங்டன் மேனிலைப் பள்ளி
திருவல்லிக்கேணி, சென்னை–600 005

மொழியாக்கத்தில் உதவியோர்

திருமதி **D. லலிதா**
கணித விரிவுரையாளர் (மு.நி.)
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி),
சென்னை–600 005

திருமதி **S. சித்ரா**
கணித விரிவுரையாளர் (மு.நி.)
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி),
சென்னை–600 005

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு : தமிழ்நாடு அரசுக்காக
பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு.

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

நூல் முகம்

தமிழ்நாடு அரசின் புதிய கல்விப் பாடத்திட்டம் -2003 வழிகாட்டுதலின்படி மேனிலை முதலாம் ஆண்டிற்காக இக்கணிதப்பாட நூல் இயற்றப்பட்டுள்ளது. இளைஞர்களின் வருங்காலத்தை நிர்ணயிக்கக் கூடியதோடல்லாமல், தங்களுடைய பகுப்பாய்வு மற்றும் சிந்தனைத் திறனையும் வளர்த்து அறிவியல் தொழில்நுட்பத்தின் அடித்தளமாக கணிதம் நிகழ்வதால் இன்றைய அதிவேக அறிவு வளர்ச்சி யுகத்தில் கணிதப் பாடநூல் இயற்றுதல் என்பது சவாலாகவும் சாதனையாகவும் உள்ளது.

அதிகப் பயிற்சி தேவைப்படுகின்ற மாணவர்களுக்கு இந்நூல் பயன்படுவதைப் போன்றே அறிவினை அடுத்த படிநிலைக்கும் கொண்டு செல்ல விரும்பும் மாணவர்களுக்கும் இந்நூல் துணை செய்யும்.

இந்நூலின் ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியும் அறிமுகம், விளக்கம், கருத்துருக்கள், கணிதச் செயல்பாடுகள், விடைகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ளது. இவற்றைத் தொடர்ந்து பல்வேறு விதமான கணிதத் தீர்வுச் சான்றுகளும் அளிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்நூலில் புதிதாக இணைக்கப்பட்டுள்ள ***'சார்புகளும் வரைபடங்களும்'*** *என்னும் பகுதி இப்பாடநூலின் குறிப்பிடத்தக்க அம்சமாகும். இப்பகுதியில் நுண்கருத்துக்கள் பல பருப்பொருள் நிலையிலான கருத்துக்களாலும் வரைபடங்களாலும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.*

இந்நூல் கணிதம் பயிற்றுவிக்கும் ஆசிரியர்களுக்கும் பயிலும் மாணவர்களுக்கும் பெருந்துணைபுரியும் என்பதில் எள்ளளவும் ஐயமில்லை. ஏனெனில் இப்பாடப் புத்தகத்தில் ***ஐந்நூற்றுக்கும் மேற்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளும். ஆயிரத்திற்கும் மேற்பட்ட பயிற்சி வினாக்களும் இடம்பெற்றுள்ளன.*** *இவை அனைத்தையும் ஆசிரியர்களே கற்பிக்க வேண்டும் என்று எதிர்பார்ப்பது முற்றிலும் இயலாத ஒன்று, எனவே. ஆசிரியர் கற்பித்த கணித அடிப்படைகளைக் கொண்டு, மாணவர்கள் தாங்களாகவே விடை காண முயல வேண்டும். பயிற்சி வினாக்கள் என்பது பயிலும் மாணவர்களுக்கு என்பதை நினைவில் கொள்ளுதல் வேண்டும். உயர்கல்விக்கு நுழைவாயிலாக '+1 வகுப்பு' நிகழ்வதால் இப்பாடப் புத்தகத்தில் காணும் ஒவ்வொரு கருத்தாக்கத்தையும் கவனமாகப் புரிந்து கொள்ளுதல் வேண்டும்.*

இப்பாடப்புத்தகத்தின் சிறப்புகள் :

(i) மாணவர்கள் தாங்களாகவே விடைகாணும் வழிகளைப் புரிந்து கொள்ளக்கூடிய நிலையில் எளிமையானதாகவும். ஆழமாகவும் கணக்குகள் விளக்கப்பட்டுள்ளது,

(ii) கணிதக் கொள்கைகளை விளக்குவதில் மிகுந்த கவனம் மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

(iii) வழிகாட்டுதல் கூறப்பட்டுள்ளதால் மாணவர்கள் தாங்களாகவே பயிற்சி வினாக்களுக்கு விடைகாண முயல வழி ஏற்படுகிறது.

(iv) விளக்கத்திற்குத் தேவையான வரைபடங்கள் ஆங்காங்கே தரப்பட்டுள்ளன, இதனால் கருத்தாக்கங்களின் புரிதிறன் எளிமையாக்கப்பட்டுள்ளது.

(v) கணக்குகள் தக்க கவனத்துடன் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு நன்றாக தரப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

இப்புத்தகத்தை மேலும் சீராக்கும் பொருட்டு ஆசிரிய பெருமக்களிடமிருந்தும் மாணவ மணிகளிடமிருந்தும் ஆலோசனைகள் மற்றும் விமர்சனங்களையும் வரவேற்கிறோம்.

கோ. ஸ்ரீனிவாசன்
தலைவர்
ஆசிரியர் குழு

பாடத்திட்டம்

(1) ***அணிகளும் அணிக்கோவைகளும் : <u>அணி இயற்கணிதம்</u>*** – *வரையறைகள், வகைகள், அணிகளின் மீதான செயல்முறைகள், இயற்கணிதப் பண்புகள்,* ***<u>அணிக்கோவைகள்</u>*** *– வரையறைகள், பண்புகள், மதிப்பிடல், காரணி முறை, அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல், இணைக்காரணிக் கோவைகள்.* **(18 periods)**

(2) ***வெக்டர் இயற்கணிதம்*** **:** *வரையறைகள்,* ***<u>வெக்டர் வகைகள்,</u>*** *வெக்டர் கூட்டர், கழித்தல், திசையிலி பெருக்கல், பெருக்கற் பண்புகள்,* ***<u>நிலை வெக்டர்</u>****, வெக்டரை கூறுகளாகப் பிரித்தல், திசைக் கொசைன்கள், திசை விகிதங்கள்.* **(15 periods)**

(3) ***இயற்கணிதம்*** **:** ***<u>பகுதிப் பின்னங்கள்</u>*** *– வரையறைகள், ஒரு படிக் காரணிகள் (ஒரே காரணி மீண்டும் வராமை), ஒருபடிக் காரணிகள் (காரணிகள் மீண்டும் வருதல்), இருபடிக் காரணிகள் (காரணிகள் மீண்டும் வராமை),* ***<u>வரிசை மாற்றங்கள்</u>*** *– எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள், வரிசை மாற்றங்களின் கருத்தியல், பலமுறை வரும் பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள், பொருட்கள் மீண்டும் ஒரே இடத்தில் இடம்பெறுவதை ஏற்றுக் கொள்ளும் வரிசை மாற்றங்கள், வட்ட வரிசை மாற்றங்கள்,* ***<u>சேர்வுகள், கணிதத் தொகுத்தறிதல், ஈருறுப்புத் தேற்றம்</u>*** *(இயல் எண் அடுக்கு) – மைய உறுப்பு, குறிப்பிட்ட உறுப்புக் காணல்* **(25 periods)**

(4) ***தொடர் முறையும் தொடரும்*** **:** *வரையறைகள், சில சிறப்பான தொடர் முறைகளும் அவற்றின் தொடர்களும், இசைத் தொடர்முறை, தொடர்முறைகளின் சராசரிகள், விகிதமுறு அடுக்குக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றம், ஈருறுப்புத் தொடர், தோராய மதிப்பு, கூடுதல் காணல், படிக்குறித் தொடர், மடக்கைத் தொடர் (எளிய கணக்குகள்)* **(15 periods)**

(5) ***பகுமுறை வடிவியல்*** **:** *நியமப் பாதை, நேர்க்கோடுகள், செங்குத்து வடிவம், துணையலகு வடிவம், பொது வடிவம், புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளம், நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு, இரு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம், இரட்டை நேர்க்கோடுகள், வட்டம் – பொதுச் சமன்பாடு, துணையலகு வடிவம், தொடுகோடு, தொடுகோட்டின் நீளம், தொடுகோட்டிற்கான நிபந்தனை, தொடுகோடுகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடு, வட்டங்களின் தொகுப்பு – பொது மைய வட்டங்கள், செங்குத்து வட்டங்கள்* **(23 periods)**

(6) ***திரிகோணமிதி*** **:** *அறிமுகம், திரிகோணமிதி விகிதங்களும் முற்றொருமைகளும் T-விகிதங்களின் குறியீடுகள், கூட்டுக் கோணங்கள்* A ± B, *மடங்கு கோணங்கள்* 2A, 3A, A/2. *பெருக்கலை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுதல், நிபந்தனைக்குட்பட்ட முற்றொருமைகள், திரிகோணமிதி சமன்பாடுகள், முக்கோணத்தின் பண்புகள், முக்கோணங்களின் தீர்வுகள்* (SSS, SAA, SAS *மட்டும்*), *நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள்* **(25 periods)**

(7) ***சார்புகளும் வரைபடங்களும்*** **:** *மாறிலிகள், மாறிகள், இடைவெளிகள், அண்மைப்பகுதி, கார்டீசியன் பெருக்கல், தொடர்பு, சார்பு, சார்பின் வரைபடம், நிலைக்குத்துக்கோடு சோதனை, சார்புகளின் வகைகள் - மேற்கோர்த்தல், ஒன்றுக்கு ஒன்று, சமனி, நேர்மாறு சார்பு, இரு சார்புகளின்-இணைப்பு, கூடுதல், வித்தியாசம், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல், மாறிலிச் சார்பு, விகிதமுறு சார்பு, படிக்குறிச் சார்பு, தலைகீழி, எண்ணளவைச் சார்பு, மீப்பெரு முழு எண் மற்றும் மீச்சிறு முழு எண் சார்புகள், குறிச்சார்பு, ஒற்றைப்படை மற்றும் இரட்டைப்படைச் சார்பு, திரிகோணமிதிச் சார்புகள், இருபடிச் சார்புகள், இருபடி அசமன்பாடு - சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம்.* **(15 periods)**

(8) ***வகை நுண்கணிதம்*** **:** ***<u>சார்பு எல்லை</u>*** *- கருத்தாக்கம், அடிப்படைத் தேற்றங்கள், முக்கிய எல்லைகள்,* ***<u>சார்பின் தொடர்ச்சி</u>*** *- ஒரு புள்ளியில், இடைவெளியில். தொடர்ச்சியற்ற சார்பு,* ***<u>வகையீடு-கருத்தாக்கம்</u>*** *- வகைக்கெழு, சாய்வு, வகையிடலுக்கும் தொடர்ச்சிக்கும் இடையேயான தொடர்பு, வகையிடல் முறைகள் - அடிப்படைக் கொள்கைகள், தேர்ந்த சார்புகளின் வகைக்கெழுக்கள், பிரதியிடல் முறை, துணையலகுச் சார்பு முறை, உட்படு சார்பு முறை உயர் வரிசை வகைக்கெழு*, (3-ம் *வரிசை வரை*) **(30 periods)**

(9) ***தொகையிடல்*** **:** *கருத்தாக்கம், தொகையிடல் வகையிடலின் எதிர்மறை, ஒருபடிச் சார்புகள், பண்புகள், தொகையீடு முறைகள் - பிரித்தெழுதும் முறை, பிரதியிடல் முறை, பகுதித் தொகையிடல், வரையறுத்தத் தொகைகள் - கூட்டுத் தொகையாகக் காணல் (எளிய கணக்குகள்)* **(32 periods)**

(10) ***நிகழ் தகவு*** **:** *வரையறை, கோட்பாடுகள், அடிப்படைத் தேற்றங்கள், சார்புநிலை நிகழ் தகவு, கூட்டு நிகழ் தகவு, பேய்ஸ்-ன் தேற்றம் (நிரூபணமின்றி) எளிய கணக்குகள்.* **(12 periods)**

பொருளடக்கம்

1. அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

1.1 அணி இயற்கணிதம் (Matrix Algebra)

1.1.1 அறிமுகம்

"அணி" என்ற சொல் முதன்முதலில் சில்வஸ்டர் (Sylvester) என்பவரால் 1850இல் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. அவர் அணியை, உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்துதல் என வரையறுத்தார். 1858இல் கெய்லி (Cayley) என்பவர் அணிகளின் கூட்டல், கழித்தல், திசையிலி பெருக்கல், எதிர்மறை போன்றவற்றை வரையறுத்து அணி இயற்கணிதத்திற்கு வழிவகுத்தார். அணிகளின் பயன்பாடு, கணிதத்தில் ஏறத்தாழ அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் அதிகமாக இருப்பதினால், அவற்றைப் பற்றி அறிந்து கொள்ளுதல் மிகவும் அவசியமாகும். பொருளாதார நிபுணர்களின் சமுதாயக் கணக்கெடுப்பு, விவரங்களை உட்செலுத்துதல், வெளிக்கொணரல், தொழிற்சாலைகளுக்கு இடையேயான பொருளாதாரம் ஆகியவற்றிற்கு அணிகளைப் பயன்படுத்துகின்றனர். மேலும் தகவல் தொடர்பு, கருத்தாய்வு மற்றும் மின் பொறியியலின் கட்டமைப்பு பகுப்பாய்வுகளுக்கும் அணிகள் மிகவும் உதவியாயுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டாகப் பல்வேறு தேர்வுகளில் பல்வேறு பாடப்பிரிவுகளில் ஒரு மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களை பின்வருமாறு பட்டியலிடுவோம்.

	தமிழ்	ஆங்கிலம்	கணிதம்	அறிவியல்	சமூக அறிவியல்
தேர்வு 1	70	81	88	83	64
தேர்வு 2	68	76	93	81	70
தேர்வு 3	80	86	100	98	78

மேற்கண்ட மதிப்பெண்களை திரும்பவும் மறுபதிப்பு செய்து கீழ்க்கண்ட அமைப்பில் தரலாம்.

$$\begin{array}{l} \text{முதல் நிரை} \\ \text{இரண்டாம் நிரை} \\ \text{மூன்றாம் நிரை} \end{array} \begin{bmatrix} 70 & 81 & 88 & 83 & 64 \\ 68 & 76 & 93 & 81 & 70 \\ 80 & 86 & 100 & 98 & 78 \end{bmatrix}$$

1-ம் நிரல்	2-ம் நிரல்	3-ம் நிரல்	4-ம் நிரல்	5-ம் நிரல்

இந்த அமைப்பானது நமக்குப் பின்வரும் தகவல்களைத் தருகிறது.

(i) *முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரைகளிலுள்ள உறுப்புகள் குறிப்பிட்ட தேர்வில் பல்வேறு பாடப்பிரிவுகளின் மதிப்பெண்களைத் தருகின்றன,*

(ii) *முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது, ஐந்தாவது நிரல்களிலுள்ள உறுப்புகள் பல்வேறு தேர்வுகளில் குறிப்பிட்ட பாடப்பிரிவின் மதிப்பெண்களைத் தருகின்றன,*

இவ்வாறாக அணிகள் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணக்குகளைப் பற்றி படிப்பதற்கு, ஒரு சுருக்கு வழியை அளிக்கின்றன. ஒருபடி சமன்பாடுகளின் தொகுப்பையும், ஆயத்தொலைவெளிகளின் உருமாற்றங்கள் போன்றவற்றை அணிகளால் குறிக்கலாம்,

1.1.2 வரையறைகள் :

உறுப்புகளைச் செவ்வக வடிவில் நிரைகள் மற்றும் நிரல்களைக் கொண்டு ஒரு அடைப்புக் குறிக்குள் அமைப்பது அணியாகும். இதன் உறுப்புகள் எண்களாக (மெய் அல்லது கலப்பெண்), பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக அல்லது மற்ற கோவைகளாக இருக்கலாம். அணிகளை A, B, C… *என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.*

அணிகளுக்கான சில உதாரணங்கள்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{முதல் நிரை} \\ \text{2ஆம் நிரை} \\ \text{3ஆம் நிரை} \end{matrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{முதல் நிரை } (R_1) \\ \text{2ஆம் நிரை } (R_2) \\ \text{3ஆம் நிரை } (R_3) \end{matrix}$$

A: *முதல் நிரல்*, *2ஆம் நிரல்*

B: *முதல் நிரல்* C_1, *2ஆம் நிரல்* C_2, *3ஆம் நிரல்* C_3

குறிப்பு **:** *ஒரு அணியில், நிரைகள் மேலிருந்து கீழாக எண்ணப்படுகின்றன. நிரல்கள் இடமிருந்து வலமாக எண்ணப்படுகின்றன.*

அ,து (i) *கிடைமட்டமான வரிசைகள் நிரைகள் எனப்படும்.*

(ii) *நிலையான வரிசைகள் நிரல்கள் எனப்படும்.*

ஒரு அணியின் ஒரு மூலகம் அல்லது ஒரு உறுப்பினைக் காண இரண்டு பிற்குறிகள் பயன்படுகின்றன. முதல் பிற்குறியானது உறுப்பு இடம்பெற்றுள்ள நிரையும் இரண்டாவது பிற்குறியானது உறுப்பு இடம்பெற்றுள்ள நிரலையும் குறிக்கின்றன.

அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் **(Order of a matrix)**

ஒரு அணியில் இடம்பெற்றுள்ள நிரைகள் மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை அந்த அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணமாக வரையறுக்கப்படும்.

மேற்கண்ட உதாரணத்தில் Aயின் வரிசை 3×2 (3-by-2 எனப் படிக்க வேண்டும்) Bயின் வரிசை 3×3 (3-by-3 எனப் படிக்க வேண்டும்) ஆகும்.

பொதுவாக, $m \times n$ வரிசையுள்ள அணி A பின்வருமாறு அமையும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow i\text{வது நிரை}$$

jவது நிரல்

இதனைச் சுருக்கமாக $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு a_{ij} என்ற உறுப்பு i நிரை, j நிரலில் உள்ள உறுப்பு ஆகும். i என்பது நிரையின் குறியீடு. j என்பது நிரலின் குறியீடு ஆகும். மேற்கண்ட அணி A, ஒரு $m \times n$ அணியாகும். $m \times n$ என்பது அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணமாகும்.

எ.கா. 1.1: $a_{ij} = i - 2j$ என்றவாறு உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட 3×2 வரிசை அணியை உருவாக்குக.

தீர்வு : 3×2 அணியின் பொது வடிவம்

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$ இங்கு $i = 1, 2, 3$ (நிரைகள்), $j = 1, 2$ (நிரல்கள்)

$a_{ij} = i - 2j$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$a_{11} = 1 - 2 = -1$ $\quad a_{12} = 1 - 4 = -3$

$a_{21} = 2 - 2 = 0$ $\quad a_{22} = 2 - 4 = -2$

$a_{31} = 3 - 2 = 1$ $\quad a_{32} = 3 - 4 = -1$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.1.3 அணிகளின் வகைகள் (Types of matrices)

(1) *நிரை அணி* (Row matrix) : ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே உடைய அணி ஒரு நிரை அணி அல்லது ஒரு நிரை வெக்டர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $A = [a_{ij}]_{1 \times 3} = [1 \quad -7 \quad 4]$ என்பது 1×3 வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

(ii) $B = [b_{ij}]_{1 \times 2} = [5 \quad 8]$ என்பது 1×2 வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

(iii) $C = [c_{ij}]_{1 \times 1} = [100]$ என்பது 1×1 வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

(2) *நிரல் அணி* (Column matrix) : ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே உடைய அணி ஒரு நிரல் அணி அல்லது ஒரு நிரல் வெக்டர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $A = [a_{ij}]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ என்பது 3×1 வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும்.

(ii) $B = [b_{ij}]_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \end{bmatrix}$ என்பது 2×1 வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும்.

(iii) $C = [c_{ij}]_{1 \times 1} = [68]$ என்பது 1×1 வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும்.

குறிப்பு : 1×1 வரிசையை கொண்ட அணி நிரை அணியாகவும் நிரல் அணியாகவும் கொள்ளலாம்.

(3) *சதுர அணி* (Square matrix) :

ஓர் அணியின் நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவ்வணி ஒரு சதுர அணியாகும். $n \times n$ வரிசை உடைய அணி n வரிசையுடைய சதுர அணி எனப்படும்.

$n \times n$ வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணியில் $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn}$ என்பன முதன்மை மூலைவிட்ட (அல்லது) பிரதான மூலைவிட்ட உறுப்புகள் எனப்படும்.

$A = [a_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 2 வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணியாகும்.

$B = [b_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 3 வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணியாகும்.

குறிப்பு : பொதுவாக n வரிசையுடைய சதுர அணியின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n^2 ஆகும். மேற்கண்ட இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து இக்கூற்றைச் சரிபார்க்கலாம்.

(4) மூலைவிட்ட அணி (Diagonal matrix) :

A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = 0,\ i \neq j$ எனில் A ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகும்.

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகும்.

(5) முக்கோண அணி (Triangular matrix) : ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அவ்வணி கீழ்முக்கோண அணி எனப்படும். முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அவ்வணி மேல்முக்கோண அணி எனப்படும்.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது மேல்முக்கோண அணியாகும்.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ என்பது கீழ்முக்கோண அணியாகும்.

(6) திசையிலி அணி (Scalar matrix) :

A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ எனில் Aயானது திசையிலி அணியாகும். (அ.து.) ஒரு திசையிலி அணி என்பது ஒரே மாதிரியான முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட மூலைவிட்ட அணி ஆகும்.

$A = [a_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ B = $[b_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ என்பன திசையிலி அணிகளுக்குரிய எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

(7) சமனி அணி அல்லது அலகு அணி :

A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ எனில் Aயானது ஒரு அலகு அணியாகும்.

(அ.து.) ஒரு திசையிலி அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் 1 எனில் அவ்வணி சமனி அணி அல்லது அலகு அணியாகும். n வரிசையுடைய அலகு அணியை I_n எனக் குறிக்கிறோம்.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்பன சமனி அணிகளாகும்.

(8) பூச்சிய அணி அல்லது வெற்று அணி (Zero matrix) :

ஒரு அணி $A = [a_{ij}]_{m \times n}$யின் அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், இவ்வணி பூச்சிய அணி எனப்படும். இது O எனக் குறிக்கப்படும். (அ.து.) அனைத்து i, j ன் மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij} = 0$ என்பதாகும்.

$$[0 \quad 0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என்பன பூச்சிய அணிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

(9) சம அணிகள் (Equality of matrices) :

A, B என்ற இரண்டு அணிகள் சம அணிகளாயின்,

(i) அவை ஒரே வரிசை அல்லது பரிமாணம் உடையனவாகும்.

(ii) அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும்.

(அ.து.) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ என்ற அணிகளில் $m = p$, $n = q$ ஆகவும் அனைத்து i, jக்கு $a_{ij} = b_{ij}$ எனில் A, B சம அணிகளாகும்.

எ.கா. 1.2 : $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ எனில் x, y, z, w இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

***தீர்வு* :** இரண்டு அணிகளும் சமமாதலால் ஒத்த உறுப்புகளும் சமம்.

$\therefore x = 4 \quad y = 3 \quad z = 1 \quad w = 5$

(10) நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose of a matrix) :

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட அணி Aயின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் அணி Aன் நிரைநிரல் மாற்று அணி எனப்படும். இது A' அல்லது A^Tஎனக் குறிக்கப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$ எனில் $$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Aயின் வரிசை $m \times n$ எனில் A^Tஇன் வரிசை $n \times m$ ஆகும்.

(11) *அணியின் திசையிலிப் பெருக்கல்* (Scalar multiplication) :

A என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி என்க. k என்பது ஏதேனும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலி என்க. Aயின் அனைத்து உறுப்புகளையும் kஆல் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் அணி kA ஆகும்.

(அ.து.) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$

இதுவே ஒரு அணியின் திசையிலிப் பெருக்கல் ஆகும்.

***குறிப்பு* :** A என்பது $m \times n$ வரிசையுள்ள அணி எனில் kA என்பதும் $m \times n$ வரிசையுள்ள அணி ஆகும்.

(12) *ஓர் அணியின் கூட்டல் எதிர்மறை [அ] நேர்மாறி [அ] நேர்மாறு அணி* (Negative of a matrix) :

A என்பதும் ஏதேனும் ஒரு அணி என்க. Aயின் கூட்டல் நேர்மாறி − A ஆனது அனைத்து உறுப்புகளின் குறியையும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

(அ.து.) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow -A = [-a_{ij}]_{m \times n}$

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $-A = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ ஆகும்

1.1.4 அணிகளின் மீதான செயல்முறைகள்

(Operations on Matrices)

(1) *கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்* :

A, B என்பவை சமவரிசை அணிகள் என்க. இவற்றின் கூடுதல் A + Bயானது A, Bயின் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படும்.

(அ.து) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ and $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ எனில் $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

இதேபோன்று $A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-b_{ij}]_{m \times n}$

$= [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$

***குறிப்பு* :**

(1) A + B, A − B என்ற அணிகளின் வரிசை A அல்லது Bயின் வரிசைக்குச் சமம் ஆகும்.

(2) கழித்தலைக் கூட்டலின் எதிர்மறையாய்க் கருதுவர்.

(3) Aயின் கூட்டல் எதிர்மறை − A ஆகும்.

(அ.து.) A + (− A) = (− A) + A = O = பூச்சிய அணி

எடுத்துக்காட்டாக $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 6 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ எனில்,

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 6 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 1 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+4 & 2-7 \\ 8+3 & 6+1 \\ 9-8 & -6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 11 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 6 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -3 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-4 & 2+7 \\ 8-3 & 6-1 \\ 9+8 & -6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 5 \\ 17 & -11 \end{bmatrix}$$

(2) *அணிகளின் பெருக்கல்* :

A, B*என்ற அணிகளில்* A*யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும்* B*யின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் இவ்வணிகள் பெருக்கிடத் தகுந்தவை எனப்படும். அணி* A*யின் ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள உறுப்புகளையும் அணி* B*யின் ஒவ்வொரு நிரலின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் பெருக்கிக் கூட்டுவதன் மூலம்* 'AB' *என்ற பெருக்கல் அணி பெறப்படும். இச்செய்முறையை நிரைவழி நிரலின் பெருக்கல் விதி என்பர்.*

A, B *என்பவை முறையே* $m \times n$, $n \times p$ *வரிசைகளை உடைய அணிகள் எனில் பெருக்கல் அணி* AB*யின் வரிசை* $m \times p$ *ஆகும்.*

(அ.து.) $\begin{pmatrix} \text{Aயின் நிரல்களின்} \\ \text{எண்ணிக்கை} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Bயின் நிரைகளின்} \\ \text{எண்ணிக்கை} \end{pmatrix}$

அணிகளின் பெருக்கலைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \text{ என்க.}$$

முதலில் A*யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை* B*யின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாயிருப்பதால்* AB-*ஐக் காண முடியும். பெருக்கல் அணி* AB*யானது பின்வருமாறு பெறப்படும்.*

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 & 3 & 6 \end{matrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 & 3 & 6 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 & 3 & 6 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(6)+(1)(3)+(4)(7) & (2)(4)+(1)(2)+(4)(3) & (2)(3)+(1)(5)+(4)(1) \\ (7)(6)+(3)(3)+(6)(7) & (7)(4)+(3)(2)+(6)(3) & (7)(3)+(3)(5)+(6)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+3+28 & 8+2+12 & 6+5+4 \\ 42+9+42 & 28+6+18 & 21+15+6 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ AB = \begin{bmatrix} 43 & 22 & 15 \\ 93 & 52 & 42 \end{bmatrix}$$

ABயின் வரிசை 2×3 என்பது தெளிவு. இங்கு முதல் எண்ணானது முதல் அணி Aயின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் இரண்டாவது எண்ணானது, இரண்டாம் அணி Bயின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன.

குறிப்பு : (i) AB = AC எனில் B = C என்பது உண்மையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. (அ.து.) இயற்கணிதத்தில் இருப்பதுபோன்று சமன்பாட்டில் உள்ள சம அணிகளை நீக்க இயலாது.

(ii) AB = O எனில் A = O அல்லது B = O ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq O,\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq O$.

ஆனால் $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

(iii) Aஎன்பது ஒரு சதுர அணி எனில் AA என்பதும் சம வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணியாகும். AA என்பது A^2 எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதேபோன்று $A^2A = AAA = A^3$

I என்பது ஓரலகு அணி எனில் $I = I^2 = I^3 = \ldots = I^n$.

1.1.5 அணிகளின் இயற்கணிதப் பண்புகள்

(1) *அணிகளின் கூட்டல், பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டது* :

A, Bஎன்பன சமவரிசை உடைய இரு அணிகள் எனில் A + B = B + A. இப்பண்பு அணிகளின் கூட்டலுக்குரிய பரிமாற்று விதி எனப்படும்.

(2) *அணிகளின் கூட்டல், சேர்ப்பு தன்மையுடையது* :

A, B, C என்பன சமவரிசை உடைய மூன்று அணிகள் எனில்

A+(B + C) = (A+B)+C. இப்பண்பு அணிகளின் கூட்டலுக்குரிய சேர்ப்பு விதி எனப்படும்.

(3) *கூட்டல் சமனி* :

A என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி எனில், A + O = O + A = A. இப்பண்பு அணிகள் கூட்டலுக்குரிய சமனிப் பண்பு எனப்படும். பூச்சிய அணி Oஆனது அணிகளின் கூட்டலைப் பொறுத்து சமனி உறுப்பு ஆகும்.

(4) கூட்டல் எதிர்மறை / நேர்மாறி :

A என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி எனில், $A + (-A) = (-A) + A = O$ ஆகும். இப்பண்பு, அணிகள் கூட்டலைப் பொறுத்து எதிர்மறை அல்லது நேர்மாறிப் பண்பு ஆகும்.

அணி Aயின் "கூட்டல் எதிர்மறை அணி" (அ.து.) $-A$ என்பது அணிகளின் கூட்டலைப் பொருத்து Aயின் எதிர்மறை அணி ஆகும்.

(5) பொதுவாக, அணிகளின் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது அல்ல. (அ.து.) $AB \neq BA$

(6) அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்புத் தன்மை உடையது.
(அ.து.) $A(BC) = (AB)C$

(7) அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து, பங்கீட்டுத் தன்மை உடையது.
(அ.து.) (i) $A(B + C) = AB + AC$ (ii) $(A + B)C = AC + BC$

(8) $AI = IA = A$ இங்கு I என்பது அலகு அணி (அல்லது) சமனி அணி ஆகும். இப்பண்பு அணிகளின் பெருக்கலுக்குரிய சமனிப் பண்பு எனப்படும்.

எ.கா. 1.3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ எனில்

(i) $AB \neq BA$ (ii) $A(BC) = (AB)C$
(iii) $A(B + C) = AB + AC$ (iv) $AI = IA = A$ என நிரூபி.

தீர்வு :

(i)
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1) + (8)(7) & (1)(3) + (8)(4) \\ (4)(1) + (3)(7) & (4)(3) + (3)(4) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 + 56 & 3 + 32 \\ 4 + 21 & 12 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & 35 \\ 25 & 24 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1) + (3)(4) & (1)(8) + (3)(3) \\ (7)(1) + (4)(4) & (7)(8) + (4)(3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 + 12 & 8 + 9 \\ 7 + 16 & 56 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 23 & 68 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து $AB \neq BA$ என நிறுவப்பட்டது.

(ii)
$$(AB)C = \begin{bmatrix} 57 & 35 \\ 25 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{(1)லிருந்து}$$
$$= \begin{bmatrix} (57)(-4) + (35)(3) & (57)(6) + (35)(-5) \\ (25)(-4) + (24)(3) & (25)(6) + (24)(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -228+105 & 342-175 \\ -100+72 & 150-120 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} -123 & 167 \\ -28 & 30 \end{bmatrix} \quad \ldots (3)$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(-4)+(3)(3) & (1)(6)+(3)(-5) \\ (7)(-4)+(4)(3) & (7)(6)+(4)(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+9 & 6-15 \\ -28+12 & 42-20 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -16 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -16 & 22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(5)+(8)(-16) & (1)(-9)+(8)(22) \\ (4)(5)+(3)(-16) & (4)(-9)+(3)(22) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-128 & -9+176 \\ 20-48 & -36+66 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} -123 & 167 \\ -28 & 30 \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

(3) *மற்றும்* (4)லிருந்து (AB)C = A(BC) *என நிறுவப்பட்டது.*

(iii) $$B + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 & 3+6 \\ 7+3 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+80 & 9-8 \\ -12+30 & 36-3 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 77 & 1 \\ 18 & 33 \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 57 & 35 \\ 25 & 24 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)\text{லிருந்து}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+24 & 6-40 \\ -16+9 & 24-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -34 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 57 & 35 \\ 25 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -34 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57+20 & 35-34 \\ 25-7 & 24+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 77 & 1 \\ 18 & 33 \end{bmatrix} \quad \ldots (6)$$

(5), (6) லிருந்து A(B + C) = AB + AC *என நிறுவப்பட்டது.*

(iv) Aயின் வரிசை 2×2. அதனால் $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க.

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+8(0) & 1(0)+8(1) \\ 4(1)+3(0) & 4(0)+3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+8 \\ 4+0 & 0+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A \qquad \ldots (7)$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+0(4) & 1(8)+0(3) \\ 0(1)+1(4) & 0(8)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 8+0 \\ 0+4 & 0+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A \qquad \ldots (8)$$

$\therefore$ (7), (8)லிருந்து $\quad AI = IA = A$

எ.கா. 1.4: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ எனில் $A^2 - 7A - 2I$ஐ காண்க.

தீர்வு :

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+12 & 6+15 \\ 8+20 & 12+25 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{bmatrix} \qquad \ldots (1)$$

$$-7A = -7\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -21 \\ -28 & -35 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

$$-2I = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow A^2 - 7A - 2I = A^2 + (-7A) + (-2I)$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -21 \\ -28 & -35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i.e. $$A^2 - 7A - 2I = \begin{bmatrix} 16-14-2 & 21-21+0 \\ 28-28+0 & 37-35-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

எ.கா. 1.5:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ எனில் $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+0 \\ 0+3 & 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36+12 & 24+48 \\ 18+36 & 12+144 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 48 & 72 \\ 54 & 156 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 4+12 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+0 & 0+0 \\ 15+27 & 0+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 42 & 81 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 & 0+36 \\ 0+9 & 0+27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 36 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}$$

$$2AB = 2\begin{bmatrix} 17 & 36 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 72 \\ 18 & 54 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 72 \\ 18 & 54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 42 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+34+25 & 16+72+0 \\ 0+18+42 & 9+54+81 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 60 & 88 \\ 60 & 144 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1), (2)லிருந்து $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ *என நிறுவப்பட்டது.*

எ.கா. 1.6: $[2x \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = O$ *எனில் xஇன் மதிப்பைக் காண்க.*

தீர்வு : $[2x - 9 \quad 4x + 0] \begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = O$ (முதல் இரண்டு அணிகளைப் பெருக்குக)

$$\Rightarrow \quad [(2x-9)x + 4x(3)] = O \quad \Rightarrow \quad [2x^2 - 9x + 12x] = O$$

$$\Rightarrow \quad [2x^2 + 3x] = O$$

i.e. $2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x + 3) = 0$

$$x = 0, \quad x = \frac{-3}{2}$$

எ.கா. 1.7: *தீர்க்க* : $X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$; $X - Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$ … (1)

$$X - Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \quad (X + 2Y) - (X - Y) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

அணி Yஐ சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட

$$X + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad X + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad X = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 1.1

(1) (i) $a_{ij} = i + j$ (ii) $a_{ij} = i \times j$ என இருக்குமாறு உறுப்புகளைக் கொண்ட 3×3 அணிகளை உருவாக்குக.

(2) $\begin{bmatrix} x & 3x - y \\ 2x + z & 3y - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2a \end{bmatrix}$ எனில் x, y, z இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(3) $\begin{bmatrix} 2x & 3x - y \\ 2x + z & 3y - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ எனில் x, y, z, w இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) – 2A + (B + C) (ii) A – (3B – C) (iii) A + (B + C) (iv) (A + B) + C

(v) A + B (vi) B + A (vii) AB (viii) BA

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் பின்வரும் முடிவுகளை சரிபார்.

(i) $AB \neq BA$ (ii) (AB) C = A(BC) (iii) A(B + C) = AB + AC

(6) தீர்க்க : $2X + Y + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} = O$; $X - Y = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -6 \\ -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

(7) A= $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 5A - 14\,I = O$ எனக் காட்டுக. இங்கு I என்பது இரண்டாம் வரிசை ஓரலகு அணி.

(8) A= $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 = kA - 2I$ என்றவாறு kயின் மதிப்பைக் காண்க.

(9) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 4A - 5I = O$ எனக் காட்டுக.

(10) $\begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ எனில், x-ஐ காண்க.

(11) $\begin{bmatrix} x & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$ எனில் x-ஐ காண்க.

(12) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ (ii) $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$

(iii) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ (iv) $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

(v) $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$

(13) A = $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $5C + 2B = A$ எனில், அணி Cயைக் காண்க.

(14) A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$, $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ எனில், x, y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

1.2 அணிக்கோவைகள் **(Determinants)**

1.2.1 அறிமுகம் :

அணிக்கோவை (determinant) என்ற சொல் 1801ல் காஸ் (Gauss) என்பவரால் இருபடி வடிவங்களைப் பற்றிக் குறிப்பிடும்போது முதன்முதலாக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. அணிக்கோவையானது, இருபடி வடிவங்களின் பண்புகளைத் தீர்மானித்தமையால் (determines) அதனை 'Determinant' என்ற பெயரிட்டு அழைத்தார்கள் போலும்,

பின்வரும் கோவையைக் கவனிக்க.

$$\frac{1}{2}\ \left[x_1(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)\right] \qquad \ldots (1)$$

இது ஒரு தளத்தில் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ என்ற உச்சிப் புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் குறிக்கும் என நாம் அறிவோம்.

இதே போன்று $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ … (2)
என்பது x,y-ல் அமைந்த ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு, ஒரு சோடி நேர்க்கோடுகளை குறிப்பதற்கான நிபந்தனை எனவும் நாம் அறிவோம்.

இதுபோன்ற கோவைகளை நினைவில் கொள்ளும் சிரமத்தைக் குறைக்க கணிதவியலாளர்கள் அணிக்கோவை வடிவத்தில் இக்கோவைகளைக் குறிக்கும் திட்டத்தை உருவாக்கினர்.

மேற்கண்ட கோவைகளில் (1)ஆனது கீழ்க்கண்ட வடிவத்தில் குறிக்கப்படும். $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

இதே போன்று சமன்பாடு (2) ஆனது $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ எனக் குறிக்கப்படும்.

மேலும் $a_1x + b_1y + c_1 z = 0$; $a_2x + b_2y + c_2z = 0$; $a_3x + b_3y + c_3z = 0$,
என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y, zஐ நீக்கினால், நாம்
$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0$ எனப் பெறுகிறோம்.

இதனை $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறாக ஒரு அணிக்கோவையானது சிறப்பான, சுருக்கமான வடிவில் எழுதப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட வகை கோவை ஆகும், இதில் இரு செங்குத்தான கோடுகளுக்கு மத்தியில் ஒரு சதுர வடிவில் உறுப்புகள் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

அணிக்கும் அணிக்கோவைக்கும் உள்ள வேறுபாடுகள் :

(i) ஒரு அணியினை ஒரு எண்ணாகச் சுருக்க இயலாது. அதாவது ஒரு அணி என்பது வடிவமைப்பு மட்டுமே. அதற்கு எவ்வித எண் மதிப்பும் இல்லை. ஆனால், அணிக்கோவையை ஒரு எண்ணாகச் சுருக்கலாம்.

(ii) ஒரு அணியில் நிரை, நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்க அவசியமில்லை. ஆனால் ஒரு அணிக்கோவையில் நிரை, நிரல்களின் எண்ணிக்கை எப்பொழுதும் சமமாகும்.

(iii) ஒரு அணியின் நிரை, நிரல்களை இடமாற்றம் செய்வதால் புதிய அணியைப் பெறலாம். ஆனால், ஒரு அணிக்கோவையின் நிரை, நிரல்களை இடமாற்றம் செய்வதால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

1.2.2 ***வரையறைகள்*** **:**

மெய் (அல்லது) கலப்பு எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட n வரிசையுள்ள ஒவ்வொரு சதுர அணி Aஉடன் நாம் ஒரு எண்ணைத் தொடர்பு படுத்தலாம். இதனை அணி Aஇன் அணிக்கோவை என்கிறோம். இதனை | A | அல்லது det (A) அல்லது Δ எனக் குறிக்கலாம்.

இவ்வாறாக, Aயின் உறுப்புகளை கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட அணிக்கோவை, Aஇன் அணிக்கோவை எனப்படும்.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்க.

இதன் அணிக்கோவை $| A | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}$ ஆகும்.

3ஆம் வரிசை அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வரிசை கொண்ட அணிக்கோவையை விரிவுபடுத்தி அதன் மதிப்பு காண, சிற்றணிக் கோவை மற்றும் இணைக் காரணிகளைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்ளுவது அவசியமாகும். அவற்றின் வரையறை பின்வருமாறு.

சிற்றணிக் கோவை **(Minor) :**

$| A | = |[a_{ij}]|$ என்பது n வரிசையுடைய அணிக்கோவை என்க. ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு a_{ij}இன் சிற்றணிக் கோவையானது a_{ij} இருக்கும் நிரை மற்றும் நிரலை நீக்குவதால் பெறப்படும் அணிக்கோவையாகும். a_{ij}-ன் சிற்றணிக் கோவையானது M_{ij} எனக் குறிக்கப்படும்.

இணைக்காரணி **(Co-factor) :**

தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவை இணைக்காரணி ஆகும். a_{ij}இன் இணைக்காரணி A_{ij} எனக் குறிக்கப்படும். மேலும் $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ என வரையறுக்கப்படும்.

மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ -ன் உறுப்புகளான a_{11}, a_{12}, a_{13} இவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

(i) a_{11}இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}\,a_{23}$.

a_{11}இன் இணைக்காரணி

$= A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}\,a_{23}$

(ii) a_{12}இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{33} - a_{31}a_{23}$

a_{12}.இன் இணைக்காரணி

$A_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\,(a_{21}a_{33} - a_{23}\,a_{31})$

(iii) a_{13}இன் சிற்றணிக் கோவை $= M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}$

a_{13}இன் இணைக்காரணி

$= A_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}$

குறிப்பு : ஒரு அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வழியாகவும் பின்வருமாறு விரிவுபடுத்தலாம்.

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ என்க.

$\Delta = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13}$ அல்லது $a_{11}\,M_{11} - a_{12}\,M_{12} + a_{13}\,M_{13}$ (R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த)

$\Delta = a_{11}\,A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}\,A_{31}$ அல்லது $a_{11}\,M_{11} - a_{21}\,M_{21} + a_{31}\,M_{31}$ (C_1 வழியாக விரிவுபடுத்த)

$\Delta = a_{21}\,A_{21} + a_{22}\,A_{22} + a_{23}\,A_{23}$ அல்லது $-\,a_{21}\,M_{21} + a_{22}\,M_{22} - a_{23}\,M_{23}$ (R_2 வழியாக விரிவுபடுத்த)

எ.கா. 1.8:

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ *என்ற அணிக்கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பின் சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணி காண்க.*

தீர்வு : 3-இன் *சிற்றணிக் கோவை* $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$

4-இன் *சிற்றணிக்கோவை* $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 10 = -10$

1-இன் *சிற்றணிக்கோவை* $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5$

0-இன் *சிற்றணிக்கோவை* $M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 2 = 26$

– 1-இன் *சிற்றணிக்கோவை* is $M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 5 = 13$

2-இன் *சிற்றணிக்கோவை* is $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26$

5-இன் *சிற்றணிக்கோவை* is $M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9$

– 2-இன் *சிற்றணிக்கோவை* is $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$

6-இன் *சிற்றணிக்கோவை* is $M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3$

3-இன் *இணைக்காரணி* is $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -2$

4-இன் *இணைக்காரணி* $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 10$

1இன் *இணைக்காரணி* $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 5$

0இன் *இணைக்காரணி* $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -26$

– 1-இன் *இணைக்காரணி* $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = 13$

2-இன் *இணைக்காரணி* $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = 26$

5-இன் *இணைக்காரணி* $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = 9$

– 2-இன் *இணைக்காரணி* is $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -6$

6-இன் *இணைக்காரணி* $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = -3$

பூச்சியக் கோவை மற்றும் பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள்

(Singular and Non-singular matrices) :

ஒரு சதுர அணி A-க்கு அதன் அணிக்கோவை $|A| = 0$ எனில் அது பூச்சியக் கோவை அணி எனப்படும்.

ஒரு சதுர அணி A-க்கு அதன் அணிக்கோவை $|A| \neq 0$ எனில் அது பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு பூச்சியக் கோவை அணியாகும்.

$$\because \ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும்.

$$\because \ |B| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(54 - 24) - 7(18 - 12) + 5(16 - 24)$$

$$= 1(30) - 7(6) + 5(-8)$$

$$= -52 \neq 0$$

$\therefore$ B அணி ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும்.

1.2.3 அணிக்கோவையின் பண்புகள் :

அணிக்கோவையின் பண்புகள் கணக்குகளின் தீர்வுகளை எளிதில் காண மிகவும் பயன்படுகின்றன. இப்பண்புகளை நாம் மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவைகளுக்கு மட்டுமே நிறுவுவோம். இருப்பினும் இவையாவும் எல்லா வரிசை அணிக்கோவைகளுக்கும் பொருந்தக் கூடியனவாகும்.

***பண்பு 1*:**

ஓர் அணிக்கோவையின் நிரை, நிரல்களைப் பரிமாற்றினால் அதன் மதிப்பு மாறாது.

நிரூபணம் :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

Δஐ முதல் நிரை வாயிலாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது,

$$\Delta = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3 b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \qquad \ldots (1)$$

Δ.இன் நிரை, நிரல்களைப் பரிமாற்றம் செய்வதால் ஒரு புதிய அணிக்கோவையைப் பெறுகிறோம். இதனை Δ_1 என்போம்.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$ ஒரு அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வாயிலாகவும் விரிவுபடுத்தலாம். எனவே நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1 (a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து நாம் பெறுவது $\Delta = \Delta_1$. இதிலிருந்து பண்பு நிறுவப்பட்டது.

பண்பு 2 :

ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) தமக்குள் இடமாற்றம் செய்யப்படின் அணிக்கோவையின் குறி மாறும் ; ஆனால் அதன் எண்ணளவு மாறாது.

நிரூபணம் :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க}$$

$$\Delta = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3 b_2)$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \qquad \ldots (1)$$

Δ_1 என்பது Δஇன் முதல் நிரை 2ஆம் நிரையாகவும், 2ஆம் நிரையை முதல் நிரையாகவும் இடமாற்றம் செய்வதால் ($R_1 \leftrightarrow R_2$) கிடைக்கும் அணிக்கோவை என்க.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$ இப்பொழுது நாம் $\Delta_1 = -\Delta$ என நிறுவ வேண்டும்.

Δ_1ஐ R_2 வாயிலாக விரிவு செய்ய,

$$\Delta_1 = -a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(a_2c_3 - c_2a_3) - c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$= -[a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1] \quad \ldots (2)$$

(1), (2)லிருந்து நாம் பெறுவது $\Delta_1 = -\Delta$ இதே போன்று, இக்கொள்கையை ஏதேனும் இரு நிரல்களின் இடமாற்றத்திற்கும் நிறுவலாம்.

கிளைத்தேற்றம்:

ஒரு அணிக்கோவையின் நிரைகளுக்குள் (நிரல்களுக்குள்) ஒற்றை எண்ணிக்கையில் இடமாற்றங்கள் நிகழின் அதன் குறி மாறும். இரட்டை எண்ணிக்கையில் இடமாற்றங்கள் நிகழின் அதன் குறி மாறாது.

பண்பு 3:

ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமம் எனில், அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

நிரூபணம் :

அணிக்கோவையின் மதிப்பு Δ என்க. முதல் இரண்டு நிரைகளும் சர்வசமம் எனக் கொள்க. R_1, R_2ஐ தமக்குள் இடமாற்றம் செய்வதால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு $-\Delta$ ஆகும் (பண்பு 2ன் படி) R_1, R_2 சர்வசமமாதலால், பரிமாற்றத்திற்குப் பிறகும் அணிக்கோவை (Δ) மாறாது.

(அ.து.) $\Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

பண்பு 4 :

ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு மாறிலி "k" ஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு kஆல் பெருக்கப்படும்.

நிரூபணம் :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

முதலாவது நிரையின் உறுப்புகள் யாவும் kஆல் பெருக்கி வரும் அணிக்கோவை Δ_1 என்க.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= k[a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1]$$
$\Delta_1 = k\Delta$. இதிலிருந்து பண்பு பெறப்பட்டது.

குறிப்பு :

(1) A என்பது n வரிசையுள்ள ஒரு சதுர அணி என்க. பிறகு அணி Aயின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் மாறிலி kஆல் பெருக்கினால் நாம் பெறுவது kA என்ற சதுர அணியாகும். ஆனால், அணிக்கோவையில் $k\,|A|$ என்பது ஒரு நிரை (நிரல்)யின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் மாறிலி kஆல் பெருக்க கிடைப்பதாகும்.

(2) A என்பது n வரிசையுள்ள ஒரு சதுர அணி எனில் $|kA| = k^n|A|$.

பண்புகள் (3) மற்றும் (4)லிருந்து பின்வரும் முடிவினைப் பெறுகிறோம்

ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) விகித சமத்தில் (Proportional) இருப்பின், அதாவது ஒரு நிரை (நிரல்)யானது மற்றொரு நிரை (நிரல்)யின் திசையிலி பெருக்கலாக இருப்பின், அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

பண்பு 5 : ஒரு அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரு உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்குமெனில் அவ்வணிக்கோவையை அதே வரிசையுடைய இரு அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுத இயலும். இரு அணிக்கோவைகளிலும் மீதமுள்ள நிரை (நிரல்)களின் உறுப்புகள் அவ்வாறே இருக்கும்.

நிரூபணம் : $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 + x_1 & \beta_1 + y_1 & \gamma_1 + z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ என்க

Δஐ முதலாவது நிரை வாயிலாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta = (\alpha_1 + x_1)\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - (\beta_1 + y_1)\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (\gamma_1 + z_1)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= \left\{\alpha_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \beta_1\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \gamma_1\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\}$$
$$+ \left\{x_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

இதிலிருந்து பண்பு பெறப்பட்டது.

குறிப்பு : சம வரிசை உடைய இரு அணிக்கோவைகளைக் கூட்ட (சேர்க்க) நாம் விரும்பினால், ஒரு குறிப்பிட்ட நிரை (நிரல்)யின் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும். ஆனால், மற்ற நிரைகளில் (நிரல்கள்) உள்ள உறுப்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

பண்பு 6 :

ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற பல நிரைகளில் (நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையாகப் பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

நிரூபணம் :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க}$$

இரண்டாவது நிரல், மூன்றாவது நிரல் இவற்றை முறையே l, mஆல் பெருக்கி C_1 உடன் கூட்ட பெறும் அணிக்கோவை Δ_1 என்க.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + lb_1 + mc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + lb_2 + mc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + lb_3 + nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} lb_1 & b_1 & c_1 \\ lb_2 & b_2 & c_2 \\ lb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mc_1 & b_1 & c_1 \\ mc_2 & b_2 & c_2 \\ mc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (பண்பு 5லிருந்து)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 \begin{bmatrix} \text{2வது அ.கோ.-ல் } C_1, C_2 \text{ விகிதச் சமமானவை} \\ \text{3வது அ.கோ.-ல் } C_1, C_3 \text{ விகிதச் சமமானவை} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \Delta$$

குறிப்பு :

(1) எந்தவொரு நிரை (நிரல்)யின் அனைத்து உறுப்புகளையும் ஒரே திசையிலியால் பெருக்குவது (அல்லது) வகுப்பது அணிக்கோவையின் மதிப்பை அதே திசையிலியால் பெருக்குவதற்கு (அல்லது) வகுப்பதற்குச் சமமாகும்.

(2) ஒரு அணிக்கோவையில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேலுள்ள (அல்லது) கீழுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் (கீழ் அல்லது மேல் முக்கோண அமைப்பு) அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பானது முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$|A| = 3(5-0) - 2(0-0) + 7(0-0)$$
$$= 15$$

அணிக்கோவை $|A|$யின் மதிப்பு 15 ஆகும்.

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் $3 \times 5 \times 1 = 15$.

எ.கா. 1.9 : தீர்க்க $\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

தீர்வு : முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியமாகும். எனவே, அணிக்கோவையின் மதிப்பு

$(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore \ (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \ \Rightarrow \ x = 1, \ x = 2, \ x = 3$

எ.கா. 1.10 : $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 7 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ எனில் x-க்குத் தீர்வு காண்க.

தீர்வு : $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 7 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \ (x^2 - 35) + (1-2) = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 35 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 36 \ \Rightarrow \ x = \pm 6$$

எ.கா. 1.11: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ எனில் x-க்குத் தீர்வு காண்க.

தீர்வு :

$$(0)\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad 0 - 1(x^2 - x) + 0 = 0$$

$$-x^2 + x = 0 \ \Rightarrow \ x(1-x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0, \ x = 1$$

எ.கா. 1.12: மதிப்பிடுக (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+2a & x+3a & x+4a \\ x+3a & x+4a & x+5a \\ x+4a & x+5a & x+6a \end{vmatrix}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையினை Δ என்க.

(i) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$ $C_3 \to C_3 + C_2$

$= 0$ $[\because C_1 \equiv C_3]$

(ii) $\Delta = \begin{vmatrix} x+2a & x+3a & x+4a \\ x+3a & x+4a & x+5a \\ x+4a & x+5a & x+6a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2a & a & 2a \\ x+3a & a & 2a \\ x+4a & a & 2a \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{array}$

$= 0$ [$\because$ C_2, C_3 *விகித சமமானவை*]

எ.கா. 1.13: $\begin{vmatrix} 2x+y & x & y \\ 2y+z & y & z \\ 2z+x & z & x \end{vmatrix} = 0$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\begin{vmatrix} 2x+y & x & y \\ 2y+z & y & z \\ 2z+x & z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & x & y \\ 2y & y & z \\ 2z & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & x & y \\ z & y & z \\ x & z & x \end{vmatrix}$

$= 0 + 0$ [$\because$ *முதல் அணிக்கோவையில்* C_1, C_2 *விகித சமமானவை* *இரண்டாவது அணிக்கோவையில்* C_1, C_3 *சர்வ சமம்*]

$= 0$

எ.கா. 1.14: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{array}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ R_1, R_2*விலிருந்து* $(a-b), (b-c)$ *வெளியே எடுக்கவும்*

$= (a-b)(b-c)\left[(1)(b+c) - (1)(a+b)\right] = (a-b)(b-c)(c-a)$

எ.கா. 1.15: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$ *என நிறுவுக*

தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$= xy$$

எ.கா. 1.16: $\begin{vmatrix} 1/a^2 & bc & b+c \\ 1/b^2 & ca & c+a \\ 1/c^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக

$$\begin{vmatrix} 1/a^2 & bc & b+c \\ 1/b^2 & ca & c+a \\ 1/c^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1/a & abc & a(b+c) \\ 1/b & abc & b(c+a) \\ 1/c & abc & c(a+b) \end{vmatrix}$$ R_1, R_2, R_3-ஐ a, b, cஆல் பெருக்கவும்

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1/a & 1 & a(b+c) \\ 1/b & 1 & b(c+a) \\ 1/c & 1 & c(a+b) \end{vmatrix}$$ C_2 இருந்து abc-ஐ வெளியே எடுக்கவும்

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & a(b+c) \\ ca & 1 & b(c+a) \\ ab & 1 & c(a+b) \end{vmatrix}$$ C_1ஐ abcஆல் பெருக்கவும்

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & ab+bc+ca \\ ca & 1 & ab+bc+ca \\ ab & 1 & ab+bc+ca \end{vmatrix} \quad C_3 \to C_3 + C_1$$

$$= \frac{(ab+bc+ca)}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & 1 \\ ca & 1 & 1 \\ ab & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ C_3யிலிருந்து $(ab+bc+ca)$ வெளியே எடுக்கவும்

$$= \frac{(ab+bc+ca)}{abc}(0)$$ [$\because C_2 , C_3$ சர்வ சமம்]

$$= 0$$

எ.கா. 1.17: $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix}$ என்க

R_1, R_2 , R_3ஐ முறையே a, b, cஆல் பெருக்கவும்.

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2c^2 & abc & ab+ac \\ bc^2a^2 & abc & bc+ab \\ ca^2b^2 & abc & ca+bc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(abc)^2}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac \\ ca & 1 & bc+ab \\ ab & 1 & ca+bc \end{vmatrix}$$ C_1, C_2லிருந்து abc வெளியே எடுக்கவும்

$$= abc\begin{vmatrix} bc & 1 & ab+bc+ca \\ ca & 1 & ab+bc+ca \\ ab & 1 & ab+bc+ca \end{vmatrix}$$ $C_3 \to C_3 + C_1$

$$= abc\,(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} bc & 1 & 1 \\ ca & 1 & 1 \\ ab & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ C_3லிருந்து $(ab+bc+ca)$ வெளியே எடுக்கவும்

$$= abc\,(ab+bc+ca)\ (0)$$ [$\because$ C_2, C_3 சர்வசமம்]

$$= 0$$

எ.கா. 1.18 : $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b)\,(b+c)\,(c+a)$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a+b & -(a+b) \\ -(b+c) & b+c & b+c \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$ $R_1 \to R_1 + R_2$, $R_2 \to R_2 + R_3$

$$= (a+b)\,(b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$ R_1, R_2-லிருந்து $(a+b), (b+c)$ வெளியே எடுக்கவும்

$$= (a+b)\,(b+c)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$ $R_1 \to R_1 + R_2$

$$= (a+b)\,(b+c)\times(-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -b & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)\,(b+c)\times(-2)\left[-(a+b+c)+b\right]$$

$$= (a+b)\,(b+c)\times(-2)\,[-a-c]$$

$$= 2(a+b)\,(b+c)\,(c+a)$$

எ.கா. 1.19: $\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac \\ ab & b^2+\lambda & bc \\ ac & bc & c^2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (a^2+b^2+c^2+\lambda)$ என நிறுவுக

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac \\ ab & b^2+\lambda & bc \\ ac & bc & c^2+\lambda \end{vmatrix}$ என்க

R_1, R_2 ,R_3ஐ முறையே a, b, cஆல் பெருக்கவும்

$$\Delta = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(a^2+\lambda) & a^2b & a^2c \\ ab^2 & b(b^2+\lambda) & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & c(c^2+\lambda) \end{vmatrix}$$

C_1, C_2,C_3 இருந்து முறையே a, b, c வெளியே எடுக்கவும்

$$\Delta = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2+\lambda & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+\lambda & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+\lambda & a^2+b^2+c^2+\lambda & a^2+b^2+c^2+\lambda \\ b^2 & b^2+\lambda & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+\lambda \end{vmatrix} \quad R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$$

$$= (a^2+b^2+c^2+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2+\lambda & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & \lambda & 0 \\ c^2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac \\ ab & b^2+\lambda & bc \\ ac & bc & c^2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(a^2+b^2+c^2+\lambda)$$

பயிற்சி 1.2

(1) விரிவுபடுத்தாமல் அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -5 & -15 & -10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(2) பூச்சியக் கோவை மற்றும் பூச்சியமற்ற கோவை அணியை கண்டுபிடி

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

(3) தீர்க்க (i) $\begin{vmatrix} 2 & x & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$ (ii) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = -1$

(4) மதிப்பிடுக (i) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & ab & c(a+b) \\ 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ என நிறுவுக

(6) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ என நிறுவுக.

இங்கு a, b, c என்பன பூச்சியமற்ற மெய்யெண்கள்.

இதிலிருந்து

$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ என நிறுவுக.

(8) x, y, z வெவ்வேறானவையாயிருந்து, $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1-x^3 \\ y & y^2 & 1-y^3 \\ z & z^2 & 1-z^3 \end{vmatrix} = 0$ எனில் $xyz = 1$ எனக் காட்டுக.

(9) *பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.* (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)\ (x-z)^2$

(10) *பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.*

(i) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

(iii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

(iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

1.2.4 காரணி முறை :

அணிக்கோவைகளுக்கு மீதி தேற்றத்தின்* (Remainder theorem) *பயன்பாடு

***தேற்றம்* 1.1 :**

ஓர் அணிக்கோவையின் (Δ) உறுப்புகள் xஇல் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக இருந்து, $x = a$ எனப் பிரதியிட Δஇன் மதிப்பு பூச்சியம் எனில் $(x - a)$ என்பது Δன் ஒரு காரணியாகும்.

நிரூபணம் :

Δஇன் உறுப்புகள் xஇல் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள். எனவே விரிவுபடுத்தும்போது Δ-ன் மதிப்பு x-ஆல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

இதனை $p(x)$ என்க.

$x = a$ எனும்போது $\Delta = 0$

அதாவது $x = a$ எனும்போது $p(x) = 0$

அதாவது $p(a) = 0$

∴ மீதி தேற்றத்தின்படி $(x - a)$ என்பது $p(x)$ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(அ.து.) $(x - a)$ ஆனது Δஇன் ஒரு காரணி ஆகும்.

குறிப்பு :

(1) நாம், அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் காரணிகளின் பெருக்கல் வடிவில் பெறுவதற்கு இத்தேற்றம் மிகவும் பயன்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $a = b$ என பிரதியிட அணிக்கோவை Δஇல் அதன் ஏதேனும் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் சர்வசமமானால், $\Delta = 0$ ஆகும். எனவே, மேற்கண்ட தேற்றத்தின்படி $a - b$ என்பது Δஇன் காரணியாகும்.

(2) $x = a$ என பிரதியிட, $(n \geq r)$ வரிசையுள்ள அணிக்கோவையில் r நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமமானவை $(x - a)^{r-1}$ என்பது Δஇன் ஒரு காரணியாகும்.

(3) $(x + a)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ன் காரணியாகத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $x = -a$ ஆக இருப்பதே ஆகும்.

குறிப்புரை : இப்பகுதியில், சமச்சீர் மற்றும் வட்ட (Symmetric and Cyclic) வரிசைப் பண்புகளைக் கொண்ட சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

எ.கா. 1.20: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ என்க. $a = b$ என பிரதியிட $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b & b^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$

[$\because R_1, R_2$ சர்வசமம்]

$\therefore (a - b)$ என்பது Δஇன் ஒரு காரணி.

Δவானது a, b, cஇல் சமச்சீர் பண்பு உடையது என அறியலாம். இதேபோன்று $b = c$, $c = a$ எனப் பிரதியிட $\Delta = 0$ என நாம் பெறுகிறோம். எனவே $(b - c), (c - a)$ என்பனவும் Δஇன் காரணிகளாகும்.

$(a-b)(b-c)(c-a)$ என்ற பெருக்கற்பலன் Δஇன் ஒரு காரணியாகும். இப்பெருக்கற்பலனின் படி 3 ஆகும். அதே சமயம் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் $1.b.c^3$ ஆகும். இதன் படி 4 ஆகும்.

$\therefore \Delta$விற்கு மேற்சொன்ன 3 காரணிகள் மட்டுமின்றி ஒருபடி காரணி உண்டு என அறிகிறோம்.

∴ வட்ட வரிசை மற்றும் சமச்சீர் பண்புகளினால், மீதமுள்ள ஒருபடித்தான காரணி ஒரு சமச்சீர் காரணியாக $k(a + b + c)$ எனுமாறு இருக்க வேண்டும். இங்கு k என்பது பூச்சியமற்ற மாறிலியாகும்.

$$\text{இவ்வாறாக } \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a - b)\,(b - c)\,(c - a)\,k(a + b + c)$$

kயின் மதிப்பைப் பெற, இருபுறமும் பூச்சியமாகாதபடி a, b, cக்குத் தகுந்த மதிப்புகள் கொடுக்கவும். $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = k(3)\,(-1)\,(-1)\,(2) \Rightarrow k = 1$$

$$\therefore \Delta = (a - b)\,(b - c)\,(c - a)\,(a + b + c)$$

குறிப்பு : a, b, cல் அமைந்த வட்ட வரிசை மற்றும் சமச்சீர் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும்போது மீதமுள்ள சமச்சீர் காரணியைப் பற்றிய முக்கியக் குறிப்பு

m என்பது காரணிகளின் (பிரதியிடுவதால் பெறப்பட்ட) பெருக்கலின் படி-க்கும், முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கலின் படி-க்கும் உள்ள வித்தியாசம் என்க.

(1) mஇன் மதிப்பு பூச்சியம் எனில் மற்றொரு சமச்சீர் காரணி ஒரு மாறிலியாகும். (k)

(2) mஇன் மதிப்பு ஒன்று எனில் மற்றொரு ஒருபடித்தான சமச்சீர் காரணி $k(a + b + c)$ ஆகும்.

(3) mஇன் மதிப்பு இரண்டு எனில் மற்றொரு இருபடித்தான சமச்சீர் காரணி $k(a^2 + b^2 + c^2)+l\,(ab+bc+ca)$ ஆகும்.

எ.கா. 1.21:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a - b)\,(b - c)\,(c - a)\,(ab + bc + ca)$$ எனக் காரணி முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ என்க. $a= b$ எனப் பிரதியிட

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0 \qquad [\because R_1, R_2 \text{ சர்வ சமம்}]$$

$\therefore (a - b)$ என்பது Δஇன் காரணி.

சமச்சீர் தன்மையால் $b = c$, $c = a$ எனப் பிரதியிட $\Delta = 0$ என நாம் எளிதில் காணலாம். எனவே, $(b - c)$, $(c - a)$ என்பது Δஇன் காரணிகளாகும்.

இதிலிருந்து $(a - b)\ (b - c)\ (c - a)$ என்பது Δஇன் ஒரு காரணியாகும். இப்பெருக்கலின் படி 3 ஆகும். முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் b^2c^3இன் படி 5 ஆகும்.

$\therefore \Delta$இன் மற்றொரு காரணி $k(a^2 + b^2 + c^2) + l(ab + bc + ca)$ ஆகும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \left[k(a^2 + b^2 + c^2) + l(ab + bc + ca)\right] (a - b)\ (b - c)\ (c - a)$$

k, lஇன் மதிப்புகளைப் பெற இருபுறமும் பூச்சியமாகாதபடி a, b, cக்கு தகுந்த மதிப்புகளைக் கொடுக்கவும்.

$a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ எனக் கொள்க.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = [k\,(5) + l(2)]\ \ (-1)\ (-1)\ (2)$$

$$\Rightarrow 4 = (5k + 2l)\ 2 \quad \Rightarrow \quad 5k + 2l = 2 \qquad \ldots (1)$$

மேலும் $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$ எனக் கொள்க.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[k(2) + l(-1)\right]\ \ (+1)\ (-2)\ (1)$$

$$\Rightarrow 2 = (2k - l)\ (-2) \ \Rightarrow\ 2k - l = -1 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) ஐ தீர்க்க, $k = 0$, $l = 1$எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore \Delta = (ab + bc + ca)\ (a - b)\ (b - c)\ (c - a)$$
$$= (a - b)\ (b - c)\ (c - a)\ (ab + bc + ca)$$

எ.கா. 1.22: $\begin{vmatrix} (b + c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c + a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\ (a + b + c)^3$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$a = 0$ *எனப் பிரதியிட*

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad [\because C_2 , C_3 \text{ விகித சமம்}]$$

$\therefore (a - 0) = a$ *என்பது* Δ*இன் ஒரு காரணி. இதே போன்று* $b = 0$, $c = 0$ *எனப் பிரதியிட* Δ*இன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.*

$\therefore a, b, c$ *என்பன* Δ*இன் காரணிகளாகும்.*

$a + b + c = 0$ *எனப் பிரதியிட*

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-a)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (-b)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (-c)^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

இங்கு மூன்று நிரல்களும் சர்வசமம். எனவே $(a + b + c)^2$ *என்பது* Δ*இன் ஒரு காரணியாகும்.*

$\therefore abc\ (a + b + c)^2$ *என்பது* Δ*இன் காரணியாகும். இதன் படி 5 ஆகும். முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல்* $(b+c)^2\ (c+a)^2\ (a+b)^2$*இன் படி 6 ஆகும்.*

$\therefore \Delta$*இன் மற்றொரு காரணி* $k(a + b + c)$ *என இருக்க வேண்டும்.*

$$\therefore \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = k\, abc\, (a + b + c)^3$$

$a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ *எனக் கொள்க.*

$$\therefore \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k(1)\,(1)\,(1)\,(3)^3 \Rightarrow 54 = 27k \Rightarrow k = 2$$

$$\therefore \Delta = 2abc\,(a + b + c)^3$$

எ.கா. 1.23: $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x - a)^2\,(x + 2a)$ *எனக்காட்டுக*

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$ *என்க.*

$x = a$ *எனப் பிரதியிடுக.*

$$\therefore \ \Delta = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$$

இங்கு மூன்று நிரல்களும் சர்வசமம். எனவே $(x - a)^2$ *ஆனது* Δ*இன் ஒரு காரணியாகும்.*

$x = -2a$ *எனப் பிரதியிடுக*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & -2a & a \\ 0 & a & -2a \end{vmatrix} = 0 \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$$

$(x + 2a)$ *ஆனது* Δ*இன் ஒரு காரணியாகும்.*

$\therefore$ $(x - a)^2$ $(x + 2a)$ *ஆனது* Δ*இன் ஒரு காரணியாகும். இதன் படி* 3 *ஆகும். முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கலின் படி* 3 *ஆகும். எனவே, இன்னொரு காரணி மாறிலி* k *ஆகும்.*

$$\therefore \ \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = k(x - a)^2 \, (x + 2a).$$

x^3 *உறுப்புகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த,* $1 = k$

$$\therefore \ \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x - a)^2 \, (x + 2a)$$

எ.கா. 1.24: *காரணி முறையைப் பயன்படுத்தி*

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \, (x + 9)$$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} x + 1 & 3 & 5 \\ 2 & x + 2 & 5 \\ 2 & 3 & x + 4 \end{vmatrix}$ *என்க.*

$x = 1$ *எனப் பிரதியிட,* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

இங்கு மூன்று நிரைகளும் சர்வசமம். எனவே $(x-1)^2$ ஆனது Δஇன் காரணியாகும்.

Δஇல் $x = -9$ எனப் பிரதியிட,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad [\because C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$$

$$= 0$$

$\therefore$ $(x + 9)$ ஆனது Δஇன் காரணி.

$(x-1)^2$ $(x+9)$ ஆனது Δஇன் காரணி. இதன் படி 3ஆகும். முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் $(x + 1)$ $(x + 2)$ $(x + 4)$. இதன் படி 3 ஆகும்.

$\therefore$ மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி, மாறிலி "k" ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = k(x-1)^2 (x+9).$$

x^3 உறுப்புகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த $k = 1$ எனப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ $\Delta = (x-1)^2 (x+9)$

பயிற்சி 1.3

(1) காரணி முறையைப் பயன்படுத்தி $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ எனக் காட்டுக.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$ எனக் காரணி முறையில் நிரூபிக்க.

(3) காரணி முறையைப் பயன்படுத்தி $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ தீர்க்க.

(4) காரணிப்படுத்துக $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

(5) காரணி முறையைப் பயன்படுத்தி

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$ எனக் காட்டுக.

1.2.5 அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் :

அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் முறை அணிகளின் பெருக்கல் முறையைப் போன்றதேயாகும்.

இரு அணிகளின் பெருக்கலில் நிரை-நிரல் பெருக்கல் விதி மட்டுமே பின்பற்றப்படுகிறது. அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும் நிரல்களை நிரைகளாகவும் இடமாற்றம் செய்வதால் அதன் மதிப்பு மாறாது எனப் பார்த்தோம். எனவே, இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலில், பின்வரும் முறைகளும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(1) நிரை-நிரை பெருக்கல் விதி

(2) நிரல்-நிரல் பெருக்கல் விதி

(3) நிரல்-நிரை பெருக்கல் விதி

குறிப்பு : ஒரே வரிசை உடைய இரு சதுர அணிகளின் தனித்தனியான அணிக்கோவை மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலனானது அவ்விரு அணிகளையும் பெருக்கிவரும் அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்புக்குச் சமம்.

(அ.து.) A, B என்பன ஒரே வரிசை உடைய இரு சதர அணிகள் என்க.

$|AB| = |A|\ \ |B|$ என்பது தெளிவு.

இக்கூற்று பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் சரிபார்க்கப்படுகிறது.

எ.கா. 1.25: If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ என்பன இரு சதுர அணிகள் எனில் $|AB| = |A|\ \ |B|$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|A| \ |B| = 1 \times 1 = 1 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) இல் இருந்து $|AB| = |A| \ |B|$

எ.கா. 1.26: $\begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$ *எனக் காட்டுக*

தீர்வு : L.H.S. $= \begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} o & c & b \\ c & o & a \\ b & a & o \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} o + c^2 + b^2 & o + o + ab & o + ac + o \\ o + o + ab & c^2 + o + a^2 & bc + o + o \\ o + ac + o & bc + o + o & b^2 + a^2 + 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c^2 + b^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & b^2 + a^2 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

எ.கா. 1.27: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}$ *என நிறுவுக*

தீர்வு : L.H.S. $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (*முதல் அணிக்கோவையின் நிரை நிரல்களை பரிமாற்றுக*)

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix} = \text{R.H.S}$$

எ.கா. 1.28: $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$ எனக் காட்டுக

தீர்வு :

$$\text{R.H.S.} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} ; R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ba \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \text{L.H.S.}$$

1.2.6 ஒரு அணிக்கோவைக்கும் அதன் இணைக்காரணிக்கும் உள்ள தொடர்பு :

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ எனக் கருதுக.

$a_1, b_1, c_1 \ldots$ இவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் $A_1, B_1, C_1 \ldots$ என்க.

$\therefore$ இணைக் காரணிகளின் அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

R_1 மூலம் Δ விரிவுபடுத்தப்படுகிறது என்க

$$\therefore \Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \Delta = a_1$ (a_1ன் இணைக்காரணி) + b_1 (b_1ன் இணைக்காரணி) + c_1 (c_1 ன் இணைக்காரணி)

$$\Rightarrow \quad \Delta = a_1A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$$

i.e. ***ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதலானது அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பிற்குச் சமம் ஆகும்.***

இதே போன்று $\Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \qquad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$

இப்போது, அதே அணிக்கோவையில் முதலாவது நிரை உறுப்புகள் மற்றும் இரண்டாவது நிரை உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகளின் பெருக்கற்பலனைக் காண்போம். (அ.து.) பின்வரும் கோவையைக் கருதுக.

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2$$

$$= - a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= - a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$= 0$$

$$\therefore a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$$

இவ்வாறாக, நாம் பெறுவது

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0 \;;\; a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \;;\; a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0$$

$$a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0 \quad ; \quad a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0$$

i.e. ***அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரை உறுப்புகள் மற்றும் வேறேதேனும் நிரை உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் இவற்றின் பெருக்கற் பலனின் கூடுதலானது பூச்சியமாகும்.***

குறிப்பு :

நிரைகளுக்குப் பதிலாக, நாம் நிரல்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் இதே முடிவுகளைப் பெறுவோம்.

$$\therefore \Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3$$

மேற்கண்ட முடிவுகளைப் பின்வரும் அட்டவணைகளின் மூலம் காட்ட இயலும்.

நிரை வாயிலாக

	R_1	R_2	R_3
r_1	Δ	0	0
r_2	0	Δ	0
r_3	0	0	Δ

நிரல் வாயிலாக

	C_1	C_2	C_3
c_1	Δ	0	0
c_2	0	Δ	0
c_3	0	0	Δ

இங்கு r_i, c_i என்பன முறையே கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் iவது நிரை மற்றும் iவது நிரலாகும். R_i, C_i என்பன முறையே ஒத்த இணைக்காரணி அணிக்கோவையின் iவது நிரை மற்றும் iவது நிரலாகும்.

எ.கா. 1.29:

A_1, B_1, C_1 என்பவை a_1, b_1, c_1-இன் இணைக்காரணிகளாக இருப்பின் $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^2$ என நிரூபி

தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_1C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$$

$$\text{i.e. } \Delta \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^3 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^2$$

பயிற்சி 1.4

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & -1 & a^2-2a \\ -a^2 & a^2-2a & -1 \end{vmatrix}$ என நிரூபி.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 2a \\ b^2 & 1 & 2b \\ c^2 & 1 & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-x)^2 & (b-x)^2 & (c-x)^2 \\ (a-y)^2 & (b-y)^2 & (c-y)^2 \\ (a-z)^2 & (b-z)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$ என நிரூபி.

2. வெக்டர் இயற்கணிதம்

2.1 அறிமுகம்

அயர்லாந்து கணித வல்லுநர் W.R. *ஆமில்டன்* (1805 – 1865) *மற்றும் ஜெர்மானிய கணிதவியலாளர்* H.G. *கிராசுமான்* (1809 – 1877) *ஆகியோரின் அரிய கண்டுபிடிப்புகளில்தான் முதன் முதலில் வெக்டர்கள் பற்றிய கருத்து படிவங்கள் உருவாயின. இவர்கள் இருவரும் சமஸ்கிருதத்தில் தேர்ச்சியடைந்த மொழியாளர்கள் என்பது ஆச்சரியப்படத்தக்கதாகும்.*

அமெரிக்க மற்றும் இங்கிலாந்து கணித வல்லுநர்களான J.B. *கிப்ஸ்* (1839 – 1903), Q. *கீயர்சைட்* (1850 – 1925) *ஆகியோர் நுண்கணிதத்தில் கார்ட்டீசியன் வடிவ கணிதத்தினை இணைக்கும்போது உருவான புதிய பாடமே வெக்டர் இயற்கணிதமாகும். வெக்டர் என்ற வார்த்தை லத்தீன் மொழியில்* ‘to carry’*என்ற மொழியாக்கத்துடன் ஆமில்டனால் கண்டறியப்பட்டது. மேலும் வெக்டரியல், கிராசுமானின் நீட்சியியலையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது.*

பிற்காலத்தில் வெக்டர்களானது வடிவியலையும், இயற்பியலையும் வெகுவாக ஆக்கிரமித்து, மிகச்சிறந்த புதிய வெளிப்பாடுகள் உருவாயின. தற்போது வெக்டர் இயற்கணிதமானது இயந்திரவியல், தொழில்நுட்பவியல் மற்றும் பயனுறு கணிதத்திலும் வெகுவாகப் பயன்படுகிறது.

இயற்பியல் கணியங்களைத் (Physical quantities) *திசையிலிகளாகவும்* (scalars) *மற்றும் வெக்டர்களாகவும் இருவகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.*

வரையறைகள்:

திசையிலி : *எண்ணளவை மட்டும் கொண்டுள்ள கணியம் திசையிலி எனப்படும். இதற்கு வெளியில்* (space) *எந்தவித திசையுடனும் தொடர்பில்லை.*

எ.கா.: பருமன், கன அளவு, அடர்த்தி, வேலை, வெப்ப நிலை, தூரம், பரப்பளவு, மெய்யெண்கள் போன்றவை.

நாம் திசையிலியைக் குறிப்பதற்கு மெய்யெண்களைப் பயன்படுத்துவோம். அது, அந்தக் கணியத்தின் எண்ணளவை சில அடிப்படை அலகுடன் தருகிறது. நாம் திசையிலிகளை மெய்யெண்களாகக் கொண்டு, அவற்றினை a, b, c…*என்ற குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம்.*

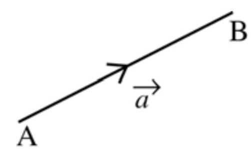
வெக்டர் : *திசையும் எண்ணளவும் கொண்ட கணியம் வெக்டர் எனப்படும்.*

எ.கா. : இடப்பெயர்ச்சி (displacement) திசைவேகம், முடுக்கம், திருப்புத்திறன், விசை, விசையின் எடை போன்றவை.

வெக்டர்களை குறிக்கும் முறை :

ஒரு வெக்டரை நேர்க் கோட்டுத் துண்டாகக் குறிக்கலாம். இதில் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நீளம் வெக்டரின் எண்ணளவு (magnitude) ஆகும். அந்நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் ஒரு முனையிலுள்ள அம்புக் குறியானது அவ்வெக்டரின் திசையினை குறிக்கும்.

ஒரு வெக்டரை $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ என்று குறிப்பிட்டால் அதில் நேர்க்கோட்டுத் துண்டு AB-ன் நீளமானது $\vec{a}$ ன் எண்ணளவையும் A யிலிருந்து Bஐ நோக்கிய திசையானது $\vec{a}$ ன் திசையையும் கொடுக்கும். A என்ற புள்ளியானது $\overrightarrow{AB}$ என்ற வெக்டரின் தொடக்கப் புள்ளியாகவும் B என்ற புள்ளியானது முடிவுப் புள்ளியாகவும் கருதப்படும். பொதுவாக வெக்டர்களை $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ … எனக் குறிப்பிடுவோம். ($\vec{a}$ -ஐ ‘வெக்டர் *a* எனப் படிக்கவும்.)



படம் 2. 1

***வெக்டரின் மட்டு அல்லது எண்ணளவு* (Magnitude of a vector)**

ஒரு வெக்டர் $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ -ன் மட்டு அல்லது எண்ணளவு என்பது ஒரு மிகை எண்ணாகும். இது அவ்வெக்டரின் நீளத்தின் அளவினைக் குறிப்பிடுகிறது.

அதாவது $\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ = AB எனக் குறிக்கலாம். $\vec{a}$ -ன் எண்ணளவினை ‘***a***’ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே $\left|\vec{a}\right| = a$; $\left|\vec{b}\right| = b$; $\left|\vec{c}\right| = c$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB \;;\; \left|\overrightarrow{CD}\right| = CD \;;\; \left|\overrightarrow{PQ}\right| = PQ$$

கவனம் : $\vec{a}$ -ன் முனைப்புள்ளிகள் A, B-ஐ தமக்குள் இடமாற்றம் செய்ய இயலாது.

குறிப்பு : ஒவ்வொரு வெக்டர் $\overrightarrow{AB}$ க்கும் மூன்று பண்புகள் உண்டு.

நீளம் : $\overrightarrow{AB}$ -ன் நீளத்தினை $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ அல்லது AB எனக் குறிக்கலாம்.

தாங்கி : AB-ஐ ஒரு பகுதியாகக் கொண்டு இருபுறமும் வரம்பின்றி நீட்டப்பட்ட நேர்க்கோட்டை, $\overrightarrow{AB}$ -ன் தாங்கி என்பர்.

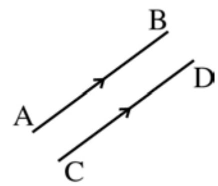
திசை : $\overrightarrow{AB}$ -ன் திசையானது Aயிலிருந்து B-ஐ நோக்கியது. மேலும் $\overrightarrow{BA}$ -ன் திசையானது Bயிலிருந்து A-ஐ நோக்கியது. ஒரு திசையிட்ட நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் திசையானது தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து முடிவுப் புள்ளியை நோக்கியதாகும்.

சமவெக்டர்கள்:

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் (i) சம நீளம் (எண்ணளவு) மற்றும் (ii) ஒரே திசையிலும் இருந்தால் அவற்றைச் சம வெக்டர்கள் எனலாம். இதனை $\vec{a} = \vec{b}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

படம் (2.2)-லிருந்து AB || CD, AB = CD

மேலும் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ஒரே திசையினையும் பெற்றிருப்பதால் $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ அல்லது $\vec{a} = \vec{b}$



படம். 2. 2

2.2 வெக்டர் வகைகள்

பூச்சிய வெக்டர் (Zero or Null Vector) :

ஒரு வெக்டரின் தொடக்கப்புள்ளி மற்றும் முடிவுப் புள்ளி ஒன்றோடொன்று ஒன்றிவிடின், அவ்வெக்டரைப் பூச்சிய வெக்டர் எனலாம். இதனை $\vec{O}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

பூச்சிய வெக்டர் அல்லாத மற்ற வெக்டர்கள் தகு வெக்டர்கள் (proper vectors) எனப்படும்.

ஓரலகு வெக்டர் அல்லது அலகு வெக்டர் (Unit vector) :

ஒரு வெக்டரின் எண்ணளவு 1 எனில் அதனை ஓரலகு வெக்டர் என்பர். $\vec{a}$ -ன் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டரை $\hat{a}$ எனக் குறிப்பிடுவர். அதாவது $\left|\hat{a}\right| = 1$. $\vec{a}$ க்கு இணையாக உள்ள அலகு வெக்டர்கள் $\pm\hat{a}$ ஆகும்.

முடிவு : $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$

வெக்டர் = (அதன் மட்டு) × (அதன் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்)

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \;;\; \left(\vec{a} \neq \vec{O}\right)$$

பொதுவாகக்

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டரின் திசையில் ஓரலகு வெக்டரைக் காண, அவ்வெக்டரை அதன் எண்ணளவால் வகுக்க வேண்டும்.

ஒரே திசை மற்றும் எதிர்த்திசை வெக்டர்கள் (Like and unlike vectors) :

ஒரே திசையலமைந்த வெக்டர்களை ஒரே திசை வெக்டர்கள் என்றும், ஒன்றுக்கொன்று எதிர்த்திசையிலமைந்த வெக்டர்களை எதிர்த்திசை வெக்டர்கள் என்றும் கூறுவர்.



ஒரே திசை வெக்டர்கள் எதிர்த்திசை வெக்டர்கள்

படம். 2. 3

ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள் (Co-initial vectors) :

ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைப் பெற்ற வெக்டர்களை ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள் என்பர்.

ஒரே முடிவுப்புள்ளி வெக்டர்கள் (Co-terminus vectors) :

ஒரே முடிவுப்புள்ளியைப் பெற்ற வெக்டர்களை ஒரே முடிவுப்புள்ளி வெக்டர்கள் என்பர்.

நேர்க்கோட்டமை அல்லது இணை வெக்டர்கள் (Collinear or Parallel vectors) :

வெக்டர்களின் இயக்கம் ஒரே நேர்க்கோட்டிலோ அல்லது இணையாகவோ இருப்பின், அவற்றை நேர்க்கோட்டமை அல்லது இணை வெக்டர்கள் என்பர்.

ஒரே தள அமை வெக்டர்கள் (Coplanar vectors) :

ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த அல்லது அந்தத் தளத்திற்கு இணையாக அமைந்த வெக்டர்கள் ஒரே தள அமை வெக்டர்கள் எனப்படும்.

எதிர்மறை வெக்டர்கள் (Negative vectors) :

$\vec{a}$ என்ற வெகடரின் எண்ணளவும் அதற்கு எதிர்த்திசையில் இயக்கத்தினையும் உடைய வெக்டரை $\vec{a}$ -ன் எதிர்மறை வெக்டர் என்பர். இதனை $-\vec{a}$ எனக் குறிப்பிடுவர். எனவே, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ எனில் அதன் எதிர்மறை $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ ஆகும்.

வெக்டரின் தலைகீழ் வெக்டர் (Reciprocal of a vector) :

$\vec{a}$ என்ற பூச்சியமற்ற வெக்டரை எடுத்துக் கொள்வோம். $\vec{a}$ ன் திசையில் அமைந்ததும் அதன் எண்ணளவின் தலைகீழ் மதிப்பை, தன் எண்ணளவாகவும் கொண்ட வெக்டர், $\vec{a}$ -ன் தலைகீழ் வெக்டர் எனப்படும். இதனை $\left(\vec{a}\right)^{-1}$ எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு $\left|\left(\vec{a}\right)^{-1}\right| = \dfrac{1}{a}$ ஆகும்.

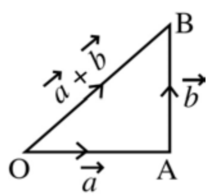
கட்டிலா வெக்டர் மற்றும் அறுதியிட்ட வெக்டர் (Free and localised vector) :

எந்தவொருப் புள்ளியையும் வெக்டரின் ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அதனைக் கட்டிலா வெக்டர் என்பர். ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மட்டுமே. ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அதனை அறுதியிட்ட வெக்டர் என்பர்.

2.3 வெக்டர்களின் மீதான செயல்முறைகள் (Operations on vectors) :

2.3.1 வெக்டர்களின் கூட்டல் (Addition of vectors) :

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ என்க. O-ஐ B-யுடன் இணைப்பதால் கிடைக்கும் வெக்டர் $\overrightarrow{OB}$ -ஐ $\vec{a}$, $\vec{b}$ க்களின் கூடுதல் என வரையறுப்பர். இதனை $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ என எழுதலாம்.

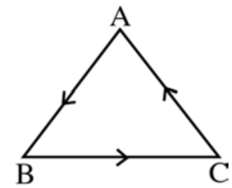


படம். 2. 4

எனவே $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

இதுவே வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதியாகும். இவ்விதியிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில், ஏதேனும் இரு வெக்டர்களை அவற்றின் எண்ணளவாலும் திசையாலும் ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களின் மூலமாக குறிப்பிட்டால், அவற்றின் கூடுதலை அம்முக்கோணத்தின் எதிர்வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது பக்கத்தினால் குறிப்பர் என்பதாகும்.

ΔABC-ல் வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதியினைப் பயன்படுத்தினால்,



$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$$

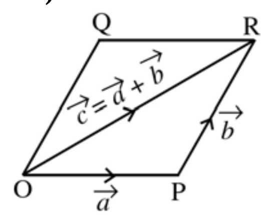
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$$

படம். 2. 5

எனவே ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசைக்கிரமமாக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் குறிக்கப்படும் மூன்று வெக்டர்களின் கூடுதலானது ஒரு பூச்சிய வெக்டர் ஆகும்.

***வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதி* (Parallelogram law) :**

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் எண்ணளவாலும் திசையாலும் ஒரு இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களால் குறிக்கப்படுமெனில் அவற்றின் கூடுதல் வெக்டர் $\vec{c}$ ஆனது அந்த இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தால் குறிக்கப்படும்.



படம் 2. 6

இங்கு $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ -ஆனவை ஒரே தொடக்கப்புள்ளியுடையவையாகும்.

இதனை $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

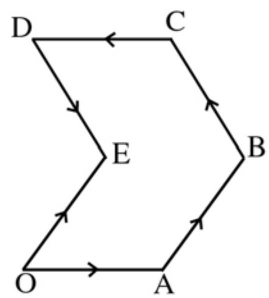
எனவே ஒரு இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்கள் இரு வெக்டர்களைக் குறிக்குமாயின், அந்த இணைகரத்தின் மூலை விட்டமானது அவ்வெக்டர்களின் கூடுதலைக் குறிக்கும்.

முக்கோண விதியினைப் பலமுறை உபயோகித்து எந்த எண்ணிக்கையிலும் உள்ள வெக்டர்களின் கூடுதலையும் நாம் காணலாம்.

படம் (2.7)-ல் $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{e}$ என்பவை ஏதேனும் ஐந்து வெக்டர்கள் என்க. ஒவ்வொரு வெக்டரும் முந்தைய வெக்டரின் முடிவுப்புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ளதைக் கவனத்தில் கொள்க.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$$

எனவே அனைத்து வெக்டர்களின் கூடுதலானது முதல் வெக்டரின் தொடக்கப் புள்ளியைக் கடைசி வெக்டரின் முடிவுப் புள்ளியுடன் இணைக்கும் வெக்டராகும். இதனை வெக்டர் கூடுதலின் பலகோண (Polygon) விதி என்பர்.



படம் 2. 7

குறிப்பு : $\vec{a} + \vec{b}$ ன் எண்ணளவானது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ன் எண்ணளவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனத்தில் கொள்க.

2.3.2 *வெக்டர்களின் கழித்தல்* (Subtraction of vectors) :

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்களின் கழித்தலை $\vec{a}$ மற்றும் $-\vec{b}$ -ன் கூடுதலாக வரையறுக்கலாம். இதனை $\vec{a} - \vec{b}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

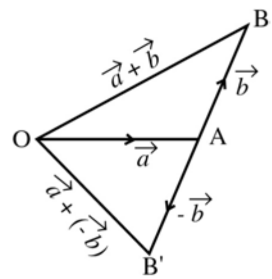
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ என்க.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ ஆகும்.

BAஐ B′ வரை AB = AB′எனுமாறு நீட்டுக.

$\therefore \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$



படம். 2. 8

இப்போது கூட்டலுக்குரிய முக்கோண விதியிலிருந்து

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{a} - \vec{b}$$

வெக்டர் கூட்டலின் பண்புகள் :

***தேற்றம்* 2.1:**

வெக்டர் கூட்டல் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யும்.

அதாவது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பவை ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ஆகும்.

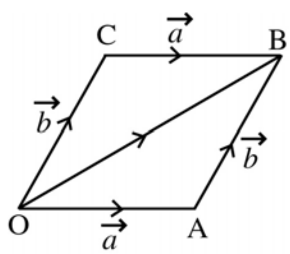
நிரூபணம்

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ என்க

ΔOABயிலிருந்து $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB} \qquad \ldots (1)$

OABC என்ற இணைகரத்தை அமைக்க



படம் 2. 9

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$

ΔOCBயிலிருந்து $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB}$

(அ.து.) $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB}$ … (2)

(1), (2) *களிலிருந்து* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

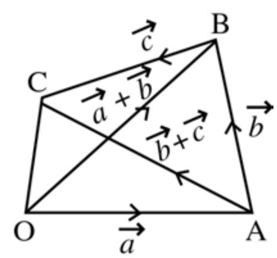
எனவே வெக்டர் கூட்டல், பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்கிறது.

தேற்றம் 2.2:

வெக்டர் கூட்டல் சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்யும்

(அ.து.) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$ ஆகும்,



படம் 2. 10

நிரூபணம் :

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ என்க

O-ஐ, B-யுடனும் ; O-ஐ C-யுடனும் ; A-ஐ C-யுடனும் இணைக்க

ΔOABயிலிருந்து $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ … (1)

ΔOBCயிலிருந்து $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \quad \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ … (2)

ΔABCயிலிருந்து $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \quad \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ … (3)

ΔOACயிலிருந்து $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \overrightarrow{OC}$ … (4)

(2), (4)-லிருந்து $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$\therefore$ *வெக்டர் கூட்டல் சேர்ப்பு விதியினை நிறைவு செய்கிறது.*

தேற்றம் 2.3: [கூட்டல் சமனிப் பண்பு]

ஒவ்வொரு வெக்டர் $\vec{a}$ -க்கும், $\vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$ என்பது உண்மை ஆகும். இங்கு $\vec{O}$ என்பது பூச்சிய வெக்டர் ஆகும்.

நிரூபணம் :

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ என்க

$$\vec{a} + \vec{O} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{O} = \vec{a}$$

மேலும்

$$\vec{O} + \vec{a} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\therefore \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$$

தேற்றம் 2.4: [கூட்டல் எதிர்மறை அல்லது நேர்மாறிப் பண்பு]

ஒவ்வொரு வெக்டர் $\vec{a}$ க்கும், $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{O} = \left(-\vec{a}\right) + \vec{a}$ என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு $-\vec{a}$ என்ற வெக்டர் காண இயலும்

நிரூபணம் : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ என்க. எனவே $\overrightarrow{AO} = -\vec{a}$

$$\therefore \vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OO} = \vec{O}$$

$$\left(-\vec{a}\right) + \vec{a} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$$

எனவே

$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \left(-\vec{a}\right) + \vec{a} = \vec{O}$$

2.3.3 வெக்டரின் திசையிலிப் பெருக்கல்

m என்பது ஒரு திசையிலி என்க. $\vec{a}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் எனில் $m\vec{a}$ என்பதுவும் ஒரு வெக்டர் ஆகும். இதன் தாங்கியும் $\vec{a}$ -ன் தாங்கியும் ஒரே நேர்க்கோடாகும். இதன் எண்ணளவு $\vec{a}$ -ன் எண்ணளவை

போல் | m | மடங்கு கொண்டதாகும். இதன் திசையானது m-ன் தன்மையைப் பொறுத்தது. m ஒரு மிகை எண்ணாக இருப்பின் $m\vec{a}$-ன் திசை, $\vec{a}$-யின் திசையாகும். m ஒரு குறை எண்ணாக இருப்பின் $m\vec{a}$-ன் திசை $\vec{a}$-ன் திசைக்கு எதிர்த்திசை ஆகும்.

முடிவு : $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் ஒரே கோட்டமை அல்லது இணை வெக்டர்களாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\vec{a} = m\vec{b}$ ஆகும். இங்கு m என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலியாகும்.

எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ க்கும் பின்வருவனவற்றை வரையறுக்கலாம்.

$$(1)\,\vec{a} = \vec{a} \quad ; \quad (-1)\,\vec{a} = -\vec{a} \quad ; \quad 0\vec{a} = \vec{O}$$

குறிப்பு : $\vec{a}$ என்பது ஒரு வெக்டர் எனில் $5\vec{a}$ -ம் ஒரு வெக்டர் ஆகும். இதன் எண்ணளவு, $\vec{a}$ -ன் எண்ணளவைப் போல் 5 மடங்காகும். மேலும் அதன் திசை $\vec{a}$ -ன் திசையிலேயே இருக்கும். ஆனால் $-5\vec{a}$ ன் எண்ணளவு $\vec{a}$ வெக்டரின் எண்ணளவைப் போல் 5 மடங்காக இருந்து, திசையானது $\vec{a}$ -ன் எதிர்த் திசையிலும் அமையும்.

வெக்டர்களின் திசையிலி, பெருக்கற் பண்புகள்

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை வெக்டர்களின் திசையிலி பெருக்கற் பண்புகள் ஆகும்.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பவை வெக்டர்களாகவும், m, n என்பவை திசையிலிகளாகவும் இருப்பின்

$$\text{(i) } m\left(-\vec{a}\right) = (-m)\,\vec{a} = -\left(m\vec{a}\right) \qquad \text{(ii) } (-m)\left(-\vec{a}\right) = m\vec{a}$$

$$\text{(iii) } m\left(n\vec{a}\right) = (mn)\,\vec{a} = n\left(m\vec{a}\right) \qquad \text{(iv) } (m+n)\,\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

தேற்றம் 2.5 [நிரூபணமின்றி] :

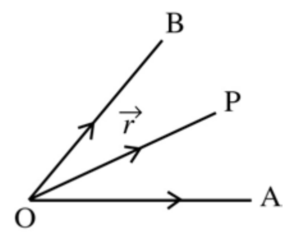
$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பவை ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் என்க. m என்பது ஏதேனும் ஒரு திசையிலியாயின் $m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m\vec{a} + m\vec{b}$.

முடிவு : தேற்றம் 2.5லிருந்து $m\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = m\vec{a} - m\vec{b}$

2.4 *நிலை வெக்டர்* (Position vector) :

மூவளவை வெளியில் (அல்லது தளத்தில்) ஒரு நிலைப்புள்ளி O*-ஐ ஆதியாகக் கொள்க.* P *என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்* $\overrightarrow{OP}$ *என்பது* O*-ஐ பொறுத்து* P*-ன் நிலை வெக்டர் (நி.வெ.) எனப்படும்.*

படத்திலிருந்து $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$



படம் 2. 11

இதைப் போல $\overrightarrow{OA}$ *என்பது* O*ஐ பொறுத்து* A *என்ற புள்ளியின் நிலைவெக்டர் ஆகும். மேலும்* $\overrightarrow{OB}$ *என்பது* O*-ஐ பொறுத்து* B*-என்ற புள்ளியின் நிலைவெக்டர் ஆகும்.*

***தேற்றம்* 2.6:** $\overrightarrow{OA}$ *மற்றும்* $\overrightarrow{OB}$ *என்பவை முறையே* A, B*யின் நிலை வெக்டர்களாக இருப்பின்,* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ *ஆகும்.*

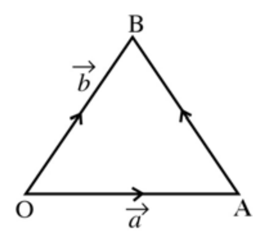
***நிரூபணம்* :** O *என்பது ஆதிப்புள்ளி என்க.* $\vec{a}$ *மற்றும்* $\vec{b}$ *என்பவை முறையே* A, B*-ன் நிலை வெக்டர்கள் என்க.*

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ *ஆகும்.*

ΔOAB*-ல் வெக்டர் கூட்டல் முக்கோண விதிப்படி*

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$



படம் 2. 12

i.e. $\overrightarrow{AB}$ = (B*-ன் நிலை வெக்டர்*) – (A*-ன் நிலை வெக்டர்*)

***குறிப்பு* :** $\overrightarrow{AB}$ *-யில்* B *என்ற புள்ளி அவ்வெக்டரின் தலையாகவும்* A *என்ற புள்ளி வாலாகவும் அழைக்கப்படும்.*

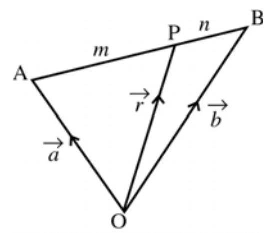
$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ = (*தலைப்புள்ளியின் நி.வெ.*) – (*வால் புள்ளியின் நி.வெ.*).

இதேப் போன்று $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

தேற்றம் 2.7: [பிரிவு சூத்திரம்– உட்புறமாக பிரித்தல்]

ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் A, B-ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்க. P என்ற புள்ளியானது AB-ஐ உட்புறமாக $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமாயின் P-ன் நிலைவெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$ ஆகும்



படம் 2. 13

நிரூபணம் :

O என்பது ஆதிபுள்ளி என்க.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ஆகும்.

O என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து P-யின் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க.

i.e. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

P ஆனது ABஐ $m : n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கிறது என்க.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \Rightarrow n\,AP = m\,PB \quad \Rightarrow n\,\overrightarrow{AP} = m\,\overrightarrow{PB}$$

$$\Rightarrow n\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right) \quad \Rightarrow n\left(\vec{r} - \vec{a}\right) = m\left(\vec{b} - \vec{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n\vec{r} - n\vec{a} = m\vec{b} - m\vec{r} \quad \Rightarrow m\vec{r} + n\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad (m+n)\,\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}}$$

***முடிவு* (1):** P என்பது AB-ன் நடுப்புள்ளி எனில் AB-ஐ 1 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

$$\therefore \text{ Pன் நிலை வெக்டர்} = \frac{1\,.\,\vec{b} + 1.\,\vec{a}}{1+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\therefore \text{ AB-ன் நடுப்புள்ளி P-ன் நிலைவெக்டர்} = \overrightarrow{OP} = \vec{r} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

***முடிவு* (2):** மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதற்கான நிபந்தனை.

நிரூபணம் **:** A, P மற்றும் B என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர் முறையே $\vec{a}$, $\vec{r}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்க. A, P மற்றும் B என்பவை நேர்க்கோட்டில் உள்ளனவாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

$$(m+n)\,\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad (m+n)\,\vec{r} - m\vec{b} - n\vec{a} = 0$$

இந்த வெக்டர் சமன்பாட்டில் இடப்புறமுள்ள திசையிலி குணகங்களின் கூடுதல் $(m + n) - m - n = 0$ ஆகும். இவ்வாறாக, பின்வரும் முடிவினைப் பெறுகிறோம்.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையுமாயின் x, y, z என்ற திசையிலிகளை $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{O}$ மற்றும் $x + y + z = 0$ எனுமாறு காண முடியும்.

மறுதலையாக x, y, z என்ற திசையிலிகள் $x + y + z = 0$, $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{O}$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ வெக்டர்களை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமை புள்ளிகளாகும்.

முடிவு 3: [பிரிவு சூத்திரம் - வெளிப்புறமாக பிரித்தல்]

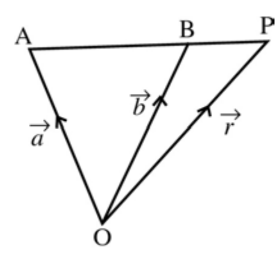
A , B என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்க. P என்ற புள்ளி AB-ஐ $m : n$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் போது P-ன் நிலை வெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n} \text{ ஆகும்}$$

நிரூபணம் **:** O என்பது ஆதிப்புள்ளி என்க.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ஆகும்.

Pஆனது ABஐ $m : n$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கிறது என்க.



படம் 2. 14

O-ஐ பொறுத்து P-ன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

இப்போது $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$ $\Rightarrow$ $n\,AP = m\,PB$

$\Rightarrow$ $n\,\overrightarrow{AP} = -m\,\overrightarrow{PB}$ $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AP} \; \& \; \overrightarrow{PB} \\ \text{எதிர்த்திசையில் உள்ளன}\end{array}\right]$

$\Rightarrow$ $n\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) = -m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$ $\Rightarrow$ $n\left(\vec{r} - \vec{a}\right) = m\left(\vec{r} - \vec{b}\right)$

$\Rightarrow$ $n\vec{r} - n\vec{a} = m\vec{r} - m\vec{b}$ $\Rightarrow$ $m\vec{b} - n\vec{a} = m\vec{r} - n\vec{r}$

$\Rightarrow$ $m\vec{b} - n\vec{a} = (m-n)\,\vec{r}$

$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

***தேற்றம்* 2.8:** ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும்.

நிரூபணம் :

ABC என்ற முக்கோணத்தில் D, E, F என்பவை முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்க.

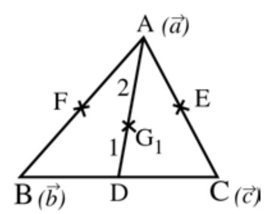
AD, BE, CF என்ற நடுக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

O என்பது ஆதிப்புள்ளி என்க. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்க.

இப்போது D, E, F ஆகியவற்றின் நி.வெ.

$\dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $\dfrac{\vec{c} + \vec{a}}{2}$, $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ ஆகும்.

AD என்ற நடுக்கோட்டை G_1 என்ற புள்ளி 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்குமாயின்,



படம். 2. 15

$\therefore$ G_1 ன் நி.வெ. $= \dfrac{2\overrightarrow{OD} + 1\overrightarrow{OA}}{2+1}$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{2\left(\dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) + 1\,\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \qquad (1)$$

BE என்ற நடுக்கோட்டை G_2 என்ற புள்ளி 2:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்குமாயின்,

$\therefore \quad \overrightarrow{OG_2}$ ன் நி.வெ.. $= \dfrac{2\overrightarrow{OE} + 1\overrightarrow{OB}}{2+1}$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{2\left(\frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}\right) + 1.\ \vec{b}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \qquad (2)$$

இதே போன்று CF என்ற நடுக்கோட்டை G_3 என்ற புள்ளி 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்குமாயின்,

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \qquad (3)$$

(1), (2), (3)களிலிருந்து G_1, G_2, G_3 என்ற புள்ளிகளின் நி.வெ. யாவும் சமம் என்பதால், இவை ஒரே புள்ளி Gஐக் குறிப்பனவாகும்.

$\therefore$ ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும்.

***முடிவு* :** ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியை நடுக்கோட்டுச் சந்தி என்பர். G என்று இதனைக் குறிப்பர்.

ΔABC-ல் G என்ற நடுக்கோட்டுச் சந்தியின் நிலைவெக்டர்

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ ஆகும். இங்கு $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்பவை A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் ஆகும். O என்பது ஆதிப்புள்ளியாகும்.

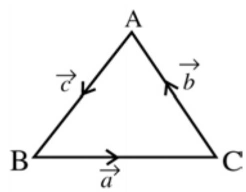
எ.கா. 2.1: ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்ற பக்கங்கள் $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களால் வரிசைக்கிரமமாகக் குறிக்கப்பட்டால், $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{O}$ என நிறுவுக.

***தீர்வு* :**

ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ என்க.

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \quad (\because \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BB} = \vec{O}\end{aligned}$$



படம் 2. 16

எ.கா. 2.2:

ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த பக்கங்கள் $\vec{a}$, $\vec{b}$ ஆக இருந்தால் மற்ற பக்கங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர்களை வரிசையாகக் காண்க.

தீர்வு :

ABCDEF என்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தில்

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ என்க

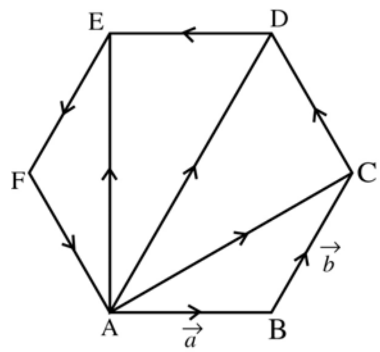
AD || BC மற்றும் AD = 2.BC ஆதலால்

$\therefore \quad \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 2\vec{b}$

ΔABC-ல் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

ΔACD-ல், $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$



படம் 2. 17

$$\therefore \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$$

$$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = -\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} - \vec{b}$$

எ.கா. 2.3:

A, B, C, D ஆகியவற்றின் நி.வெ. முறையே

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$ எனில் $\overrightarrow{DB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ காண்க.

தீர்வு :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad ; \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} \quad ; \quad \overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \quad ; \quad \overrightarrow{OD} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{b} - \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) - \vec{a} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

எ.கா. 2.4: A, B ஆகியவற்றின் நி.வெ. $\vec{a} - 2\vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$ எனில் AB-ஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் 3 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நி.வெ. காண்க.

தீர்வு :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} - 2\vec{b} \;;\; \overrightarrow{OB} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

P என்ற புள்ளி AB-ஐ 3:2 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்குமாயின்,

$$\text{P-ன் நி.வெ.} = \frac{3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}}{3+2} = \frac{3\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) + 2\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)}{5}$$

$$= \frac{6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{a} - 4\vec{b}}{5} = \frac{8\vec{a} - 7\vec{b}}{5} = \frac{8}{5}\vec{a} - \frac{7}{5}\vec{b}$$

Qஎன்ற புள்ளி AB-ஐ 3:2 என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்குமாயின்,

$$\text{Q-ன் நி.வெ.} = \frac{3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}}{3-2} = \frac{3\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) - 2\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)}{1}$$

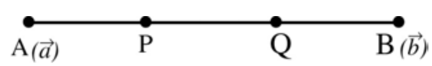
$$= 6\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{a} + 4\vec{b} = 4\vec{a} + \vec{b}$$

எ.கா. 2.5: A, B-ன் நி.வெ. முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$ எனில் AB-ஐ மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நி.வெ. காண்க.

தீர்வு :

P, Q என்ற புள்ளிகள் AB-ஐ மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது எனக் கொள்க.

$AP = PQ = QB = \lambda$ (என்க)



படம் 2. 18

P என்ற புள்ளியானது AB-ஐ 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதால்

$$\text{Pன் நி.வெ.} = \overrightarrow{OP} = \frac{1.\overrightarrow{OB} + 2.\overrightarrow{OA}}{1+2} = \frac{1.\,\vec{b} + 2.\,\vec{a}}{3} = \frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{3}$$

Q என்ற புள்ளி PB-ன் நடுப்புள்ளியாதலால்,

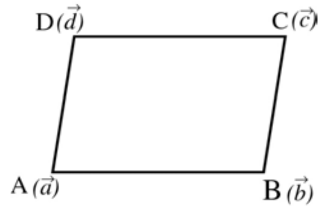
$$\text{Qன் நி.வெ.} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{3} + \vec{b}}{2} = \frac{\frac{\vec{b} + 2\vec{a} + 3\vec{b}}{3}}{2} = \frac{2\vec{a} + 4\vec{b}}{6}$$

$= \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$

எ.கா. 2.6: ஒரு நாற்கரமானது இணைகரமாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை, அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக்கூறிடுதலாகும் என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு :

ABCD என்பதனை ஒரு நாற்கரம் என்க. முதலில் இதனை ஒரு இணைகரம் என எடுத்துக் கொண்டு, அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று சமக்கூறிடும் என நிரூபிப்போம்.



படம் 2. 19

O என்பது ஆதிப்புள்ளி என்க.

$\therefore \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$

ABCD ஒரு இணைகரமாதலால் $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$

$\Rightarrow \quad \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$

i.e. BD-யின் நடுப்புள்ளியின் நி.வெ. = AC-ன் நடுப்புள்ளியின் நி.வெ. எனவே ஒரே புள்ளியானது, AC, BD-ஐ இருசமக்கூறிடுகிறது. ஆகையால் இணைகரம் ABCD-ன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகிறது.

மறுதலையாக ABCD என்ற நாற்கரத்தில் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகிறது என எடுத்துக் கொண்டு ABCD ஒரு இணைகரம் என நிறுவுவோம்.

A, B, C மற்றும் D என்ற உச்சிப்புள்ளிகளின் நி.வெ. முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ என்க. AC மற்றும் BD என்ற மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகிறது என்பதால்,

AC-ன் நடுப்புள்ளியின் நி.வெ. = BD-ன் நடுப்புள்ளியின் நி.வெ.

$$\Rightarrow \quad \dfrac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2} \quad \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \qquad \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \text{ i.e. } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

மேலும் (1) $\Rightarrow \quad \vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ i.e. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

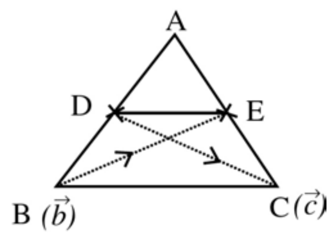
எனவே ABCD ஒரு இணைகரமாகும்.

எ.கா. 2.7: *முக்கோணம் ABC-யின் பக்கங்களான AB மற்றும் ACஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E என்றால்*

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ *எனக் காட்டுக.*

***தீர்வு* :**

A என்ற புள்ளியை ஆதிப் புள்ளியாக வசதிக்கேற்ப எடுத்துக் கொள்வோம். B, Cயின் நி.வெ. முறையே $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்க. AB, AC-யின் நடுப்புள்ளிகள் D, E ஆகையால் D, E-யின் நி.வெ. முறையே $\frac{\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{c}}{2}$ ஆகும்.



படம் 2. 20

இப்போது $\overrightarrow{BE}$ = E-ன் நி.வெ. – B-ன் நி.வெ. $= \frac{\vec{c}}{2} - \vec{b}$

$\overrightarrow{DC}$ = C-ன் நி.வெ. – D-ன் நி.வெ. $= \vec{c} - \frac{\vec{b}}{2}$

$$\therefore \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} = \frac{\vec{c}}{2} - \vec{b} + \vec{c} - \frac{\vec{b}}{2} = \frac{3}{2}\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{b}$$

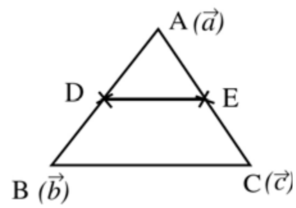
$= \frac{3}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$ $\quad = \frac{3}{2}$ [C-ன் நி.வெ.– B-ன் நி.வெ.]

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

எ.கா. 2.8: *ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு அதன் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை எனவும், அதன் அளவில் பாதி எனவும் வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.*

தீர்வு :

ABC என்ற முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொள்க. O என்பது ஆதிப்புள்ளி என்க. AB, ACயின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D,E என்க.



படம் 2. 21

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \ \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

Dயின் நி.வெ. $= \overrightarrow{OD} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

Eயின் நி.வெ. $= \overrightarrow{OE} = \dfrac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$

இப்போது $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \left(\dfrac{\vec{a} + \vec{c}}{2}\right) - \left(\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \ \Rightarrow \ DE \parallel BC$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \ \Rightarrow \ \left|\overrightarrow{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right| \ \Rightarrow \ DE = \frac{1}{2} BC$$

எனவே DE || BC and DE $= \frac{1}{2}$ BC.

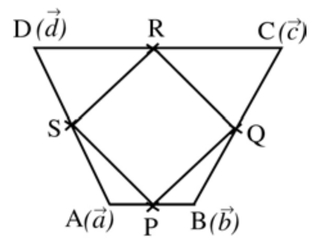
எ.கா. 2.9: *ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.*

தீர்வு :

ABCD என்ற நாற்கரத்தில் AB, BC, CD மற்றும் DA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P, Q, R, S என்க. A, B, C, Dயின் நி.வெ. முறையே $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ யாக இருப்பின்P,Q,R,S என்ற புள்ளிகளின் நி.வெ. முறையே

$$\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \ \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \ \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}, \ \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2}$$

ஆகும்.



படம் 2. 22

PQRS ஒரு இணைகரமாக இருக்க $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ என இருத்தல் வேண்டும்.

$$\overrightarrow{PQ} = \text{Q-ன் நி.வெ.} - \text{P-ன் நி.வெ.} = \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) - \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{SR} = \text{R-ன் நி.வெ.} - \text{S-ன் நி.வெ.} = \left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right) - \left(\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}\right) = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\Rightarrow$PQ || SR and PQ = SR

இதே போன்று PS = QR, PS || QR என நிரூபிக்கலாம்.

எனவே PQRS ஒரு இணைகரமாகும்.

எ.கா. 2.10 : A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நி.வெ. முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்க. இப்போது $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{O}$ மற்றும் $l + m + n = 0$ ஆகிய நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு l, m, n என்ற திசையிலிகள் (எல்லாமே பூச்சியமல்லாத) கிடைக்குமானால் A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருக்கும் என நிரூபி.

தீர்வு :

l, m, n திசையிலிகளில் ஏதேனும் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாகும். அதனை n எனக் கொள்வோம்.

$$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = 0 \Rightarrow n\vec{c} = -\left(l\vec{a} + m\vec{b}\right)$$

$$\vec{c} = -\frac{\left(l\vec{a} + m\vec{b}\right)}{n} \Rightarrow \vec{c} = -\frac{\left(l\vec{a} + m\vec{b}\right)}{-(l+m)}$$

$$\vec{c} = \frac{l\vec{a} + m\vec{b}}{l+m}$$

$\Rightarrow$ C என்ற புள்ளியானது A, B-ஐ $m : l$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. எனவே A, B, C என்பவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும்.

குறிப்பு : $\vec{a}$, $\vec{b}$ ஒரே கோட்டமை வெக்டர்கள் எனில் λ என்ற திசையிலியை $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ எனுமாறு காண முடியும்

ஒரே கோட்டமை புள்ளிகள்: A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஏதேனும் ஒரு திசையிலி λ-க்கு, $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ அல்லது $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AC}$ எனுமாறு இருப்பின், A, B, C ஆகியவை ஒரே கோட்டமை புள்ளிகளாகும்.

எ.கா. 2.11: $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$, $4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களை நி.வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமை புள்ளிகள் என நிரூபி.

தீர்வு :

A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நி.வெ. முறையே

$\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ மற்றும் $4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c}$ என்க.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c},\ \overrightarrow{OB} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c},\ \overrightarrow{OC} = 4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}\right) - \left(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}\right)$$

$$= -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} - \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = -3\vec{a} + 5\vec{b} - 4\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \left(4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c}\right) - \left(-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}\right)$$

$$= 4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c} + 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 6\vec{a} - 10\vec{b} + 8\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BC} = 6\vec{a} - 10\vec{b} + 8\vec{c} = -2\left(-3\vec{a} + 5\vec{b} - 4\vec{c}\right) = -2\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC}$ வெக்டர்கள் இணையானவை. மேலும் B என்பது இரண்டிற்கும் பொதுப்புள்ளியாகையால் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஒரே கோட்டமை வெக்டர்களாகும். எனவே A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

பயிற்சி 2.1

(1) ABCD என்ற இணைகரத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த பக்கங்களான $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஐ $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்கள் குறிக்குமாயின் அதன் மூலை விட்டங்கள் $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ -ஐக் காண்க.

(2) $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$ எனில் P, Q, R ஒரே கோட்டமை புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(3) $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $-8\vec{a} + 13\vec{b}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமை புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(4) $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $7\vec{a} - \vec{c}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள் A, B, C ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(5) ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கம் BC-யின் நடுப்புள்ளி D-எனில் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ என நிறுவுக.

(6) ABC என்ற முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி G எனில் $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$ என நிறுவுக.

(7) ABC மற்றும் A′B′C′ என்ற இரு முக்கோணங்களின் நடுக்கோட்டுச் சந்திகள் முறையே G, G′ ஆக இருப்பின் $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ என நிறுவுக.

(8) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளிகளிலிருந்து அதற்கு எதிர்ப் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை நோக்கி வரையப்படும் வெக்டர்களின் கூடுதல் பூச்சியம் என நிறுவுக.

(9) ஒரு சரிவகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடானது, இணைப்பக்கங்களுக்கு இணையாக இருக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிரூபி. மேலும், அதன் நீளமானது, இணைப்பக்கங்களின் நீளங்களின் வித்தியாசத்தைப் போல் பாதி மடங்காகும் எனவும் நிறுவுக.

(10) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் உட்புற இருசமவெட்டிகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என வெக்டர் முறையில் காண்க.

(11) ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் மற்றும் மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளாகும் என வெக்டர் முறையில் நிரூபிக்க.

(12) ABCD என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD-ன் நடுப்புள்ளிகள் E மற்றும் Fஆக இருப்பின் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{EF}$ என நிறுவுக.

2.5 வெக்டரை கூறுகளாகப் பிரித்தல் (Resolution of a Vector)

தேற்றம் 2.9 [நிரூபணமின்றி] :

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பவை ஒரே கோட்டில் அமையாத ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் என்க. $\vec{r}$ என்பது $\vec{a}$, $\vec{b}$ -யுடன் ஒரே தளத்தில் அமைந்த வெக்டராயின் $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b}$ எனுமாறு தனித்த (unique) வகையில் எழுதலாம். இங்கு l, m என்பது திசையிலிகளாகும்.

குறிப்பு : $l\vec{a} + m\vec{b}$ என்பது $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear combination) அழைக்கப்படும். l, m என்பவை திசையிலிகளாகும்.

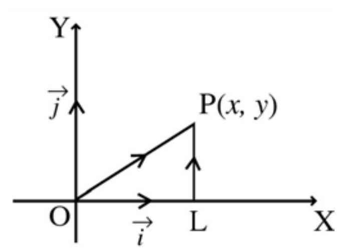
இரு பரிமாணத்தில் ஒரு வெக்டரின் செங்குத்து கூறுகள்

தேற்றம் 2.10 :

இரு பரிமாணத்தளத்தில் P என்ற ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y) எனில் $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ஆகும். இங்கு $\vec{i}$, $\vec{j}$ என்பவை முறையே OX மற்றும் OY திசைகளில் எடுக்கப்பட்ட ஓரலகு வெக்டர்களாகும்.

நிரூபணம் :

படத்தில் கண்டுள்ளபடி OX, OY என்ற அச்சுகளைப் பொறுத்து தளத்தில் ஒரு புள்ளி P-ன் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) ஆகும். OXக்கு செங்குத்தாக PL வரைக. OL = x, LP = y ஆகும். OX மற்றும் OYஅச்சுகளின் திசையில் முறையே $\vec{i}$, $\vec{j}$ என்பவை ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க.



படம் 2. 23

$\overrightarrow{OL} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{LP} = y\vec{j}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{LP}$ என்பவை முறையே x-அச்சு மற்றும் y-அச்சின் திசையில் $\overrightarrow{OP}$ -ன் கூறுகள் ஆகும்.

வெக்டர் கூட்டலுக்குரிய முக்கோண விதிப்படி,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r} \quad \text{(என்க)}$$

$$\therefore \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

இப்போது $\quad OP^2 = OL^2 + LP^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \quad OP = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$

எனவே தளத்திலுள்ள புள்ளி P-ன் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y) எனில்

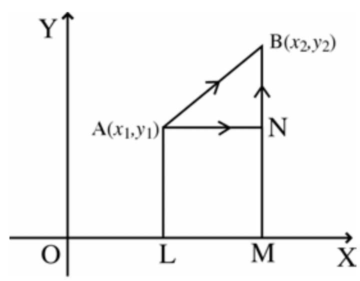
(i) $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$

(ii) $\left|\vec{r}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|x\vec{i} + y\vec{j}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$

(iii) x-அச்சுத்திசையில் $\overrightarrow{OP}$ -ன் கூறு $x\vec{i}$ என்ற வெக்டராகும். மேலும் y-அச்சுத் திசையில் $\overrightarrow{OP}$ -ன் கூறு $y\vec{j}$ என்ற வெக்டராகும்.

A மற்றும் B-ன் அச்சுத்தூரங்களின் மூலமாக $\overrightarrow{AB}$ வெக்டரின் கூறுகள்

XOY தளத்தில் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. OX, OY வழியாக எடுக்கப்பட்ட ஓரலகு வெக்டர்கள் $\vec{i}, \vec{j}$ என்க.



படம் 2. 24

$AN = x_2 - x_1$, $\quad BN = y_2 - y_1$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AN} = (x_2 - x_1)\vec{i},$$

$$\overrightarrow{NB} = (y_2 - y_1)\vec{j}$$

வெக்டர் கூட்டலுக்குரிய முக்கோண விதியின்படி,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

x-அச்சின் வழியே $\overrightarrow{AB}$ ன் கூறு $= (x_2 - x_1)\vec{i}$

y-அச்சின் வழியே $\overrightarrow{AB}$ ன் கூறு $= (y_2 - y_1)\vec{j}$

$$AB^2 = AN^2 + NB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

இது A மற்றும் Bக்கு இடையே உள்ள தூரமாகும்.

வெக்டர்களின் கூட்டல், கழித்தல், திசையிலி பெருக்கல் மற்றும் சமன் தன்மை ஆகியவற்றைக் கூறுகளின் மூலமாக எழுதுதல்

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ என்க.

இப்போது

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\right) + \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}\right) = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\right) - \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}\right) = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j}$

(iii) $m\vec{a} = m\left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\right) = ma_1\vec{i} + ma_2\vec{j}$

(iv) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow a_1\vec{i} + a_2\vec{j} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} \Rightarrow a_1 = b_1$ and $a_2 = b_2$

எ.கா. 2.12: Oஐ ஆதிபுள்ளியாகவும் XY தளத்தில் P(– 2, 4) என்பது ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்க. $\overrightarrow{OP}$ -ஐ $\vec{i}$, $\vec{j}$ யின் வாயிலாக எழுதுக. மேலும் $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ -ஐ காண்க.

தீர்வு: Pயின் நி.வெ. $\overrightarrow{OP} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|-2\vec{i} + 4\vec{j}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

எ.கா. 2.13: P(– 4, 3) என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டரின் x, y அச்சுகள் வழியான கூறுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

P-ன் நி.வெ. = $\overrightarrow{OP} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

x-அச்சு வழியே $\overrightarrow{OP}$ ன் கூறு $-4\vec{i}$ ஆகும்.

அதாவது x-அச்சு வழியே $\overrightarrow{OP}$ ன் கூறானது ஒரு வெக்டர் ஆகும். அதன் எண்ணளவு 4 மற்றும் அதன் திசை x-அச்சின் எதிர்த்திசையாகும்.

yஅச்சு வழியே $\overrightarrow{OP}$ -ன் கூறு $3\vec{j}$ ஆகும். அதாவது y-அச்சு வழியே $\overrightarrow{OP}$ -ன் கூறானது ஒரு வெக்டர் ஆகும். அதன் எண்ணளவு 3 மற்றும் அதன் திசை y–அச்சின் நேர் திசையாகும்.

எ.கா. 2.14: A(– 6, 3), B(– 2, – 5) என்ற புள்ளிகள் என்றால் $\overrightarrow{AB}$ -ஐ ஓரலகு வெக்டர்கள் $\vec{i}$, $\vec{j}$ மூலமாக எழுதுக. மேலும் $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ -ஐ காண்க.

தீர்வு : $\overrightarrow{OA} = -6\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(-2\vec{i} - 5\vec{j}\right) - \left(-6\vec{i} + 3\vec{j}\right)$$

$$= 4\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|4\vec{i} - 8\vec{j}\right| = \sqrt{(4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

தேற்றம் 2.11 [நிரூபணமின்றி] :

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமையாதவை எனில் ஒரு வெளியில் உள்ள எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{r}$ -ஐ $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ என எழுதலாம். இங்கு l, m, n என்பவை திசையிலிகள்.

முப்பரிமாணத்தில் வெக்டரின் செங்குத்து கூறுகள்

தேற்றம் 2.12:

மூவளவை வெளியில் P என்ற புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y, z) எனில் அதன் நி.வெ. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ மற்றும் $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ஆகும். இங்கு $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ என்பவை முறையே OX, OY, OZ வழியே எடுக்கப்பட்ட ஓரலகு வெக்டர்கள்.

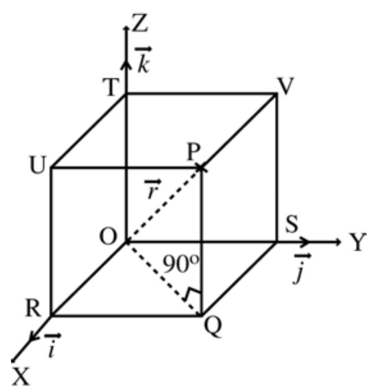
நிரூபணம் :

OX, OY, OZ என்பன ஒன்றுக்கு ஒன்றான செங்குத்தான அச்சுகள். மூவளவை வெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y, z)$ என்க.

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ என்க.

XOY தளத்திற்குச் செங்குத்தாக PQ வரைக. OXக்கு செங்குத்தாக QR வரைக. எனவே $OR = x$; $RQ = y$; $QP = z$

$\therefore \overrightarrow{OR} = x\vec{i}$; $\overrightarrow{RQ} = y\vec{j}$; $\overrightarrow{QP} = z\vec{k}$



படம் 2. 25

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

இவ்வாறாக P என்ற புள்ளி (x, y, z) மற்றும் அதன் நி.வெ. $\vec{r}$ எனில் $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணம் OQPயிலிருந்து $OP^2 = OQ^2 + QP^2$

செங்கோண முக்கோணம் ORQயிலிருந்து $OQ^2 = OR^2 + RQ^2$

$$\therefore OP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 \Rightarrow OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\therefore r = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.6 திசைக் கொசைன்கள் மற்றும் திசை விகிதங்கள் (Direction cosines and direction ratios)

O(XYZ) என்ற செவ்வக ஆயத்தொலை தொகுதியைப் பொறுத்து, மூவளவை வெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y, z)$ என்க. OX, OY, OZ அச்சுகளின் மிகைத்திசையுடன் OP ஆனது முறையே α, β மற்றும் γ என்ற கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது என்போம். அவ்வாறாயின் cosα, cosβ, cosγ என்பவை $\overrightarrow{OP}$ வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனப்படும்.

படம் 2.25லிருந்து $\underline{|OQP} = 90°$; $\underline{|POZ} = \gamma$ $\therefore \underline{|OPQ} = \gamma$ $(\because QP \parallel OZ)$

$$\therefore \cos\gamma = \frac{PQ}{OP} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{z}{r}$$ இதேப் போன்று $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ and $\cos\beta = \frac{y}{r}$

$\therefore \overrightarrow{OP}$ ன் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ ஆகும். இங்கு $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

முடிவு 1: *திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மதிப்பு 1 ஆகும்.*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2} = 1 \qquad [\because r^2 = x^2 + y^2 + z^2]$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

முடிவு 2: *திசை சைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 2 ஆகும்.*

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = (1 - \cos^2\alpha) + (1 - \cos^2\beta) + (1 - \cos^2\gamma)$$

$$= 3 - [\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma] = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore \quad \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

***திசை விகிதங்கள்* (Direction ratios):**

ஒரு வெக்டாரின் திசை கொசைன்களுக்கு விகித சமமான எந்த மூன்று எண்களும் அதன் திசை விகிதங்கள் (d. r's) *என்றழைக்கப்படும்.*

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *என்ற ஏதேனும் ஒரு வெக்டரை எடுத்துக் கொள்க.*

$\Rightarrow \vec{r}$ *ன் திசை கொசைன்கள்* $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\cos\beta = \frac{y}{r}$; $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ *இங்கு* α, β, γ *என்ற கோணங்கள்* OX, OY, OZ *அச்சுகளுடன்* $\vec{r}$ *ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் ஆகும்.*

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos\alpha} = r, \ \frac{y}{\cos\beta} = r, \ \frac{z}{\cos\gamma} = r$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma} = r$$

$$\Rightarrow x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

i.e. *வெக்டாரின் செங்குத்துக் கூறுகளான* i, j, k*க்களின் குணகங்கள் அந்த வெக்டாரின் திசைக் கொசைன்களுக்கு விகித சமமாக இருக்கும்.*

$\therefore \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *என்ற வெக்டாரின் திசை விகிதங்கள்* x, y, z *ஆகும்.*

வெக்டர்களின் கூட்டல், கழித்தல், திசையிலி பெருக்கல் மற்றும் சமன் தன்மை ஆகியவற்றைக் கூறுகள் மூலமாக எழுதுதல் :

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *என்ற இரு வெக்டார்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.*

இப்போது

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$

(iii) $m\vec{a} = m\left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)$

$= ma_1\vec{i} + ma_2\vec{j} + ma_3\vec{k}$ *இங்கு* m *ஒரு திசையிலி*

(iv) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2 ; a_3 = b_3$

இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் :

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ என்ற ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$\therefore$ A மற்றும் Bக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right|$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

எ.கா. 2.15: $2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் எண்ணளவு மற்றும் திசைக் கொசைன்களை காண்க.

தீர்வு :

$2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ ன் எண்ணளவு $= \left|2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}\right| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (7)^2}$

$= \sqrt{4 + 1 + 49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{2}{3\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}, \dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ ஆகும்.

எ.கா. 2.16: $3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் ஓரலகு வெக்டரை காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ என்க

$$\left|\vec{a}\right| = \left|3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-12)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$\vec{a}$ ன் திசையில் ஓரலகு வெக்டர் $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}}{13}$

எ.கா. 2.17: $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ என்ற வெக்டர்களின் கூடுதல் காண்க. மேலும் அக்கூடுதலின் எண்ணளவைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ என்க.

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) + \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\right) = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$$

எ.கா. 2.18: $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் A மற்றும் B-ன் நிலை வெக்டர்கள் எனில் $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ -ஐ காண்க.

தீர்வு :

O என்பது ஆதிப்புள்ளி எனில்

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k},\quad \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \left(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}\right) - \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)$$

$$= \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2 + (4)^2} = \sqrt{53}$$

எ.கா. 2.19: $-3\vec{i} + 4\vec{j}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான ஓரலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} = \frac{1}{5}\left(-3\vec{i} + 4\vec{j}\right)$$

$\vec{a}$ க்கு இணையான ஓரலகு வெக்டர்கள் $\pm\hat{a} = \pm\left(\frac{-3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right)$

எ.கா. 2.20: $2\vec{i} - \vec{j}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும் எண்ணளவு 5 அலகுகளாகவும் கொண்ட வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

$2\vec{i} - \vec{j}$ க்கு இணையாகவும் எண்ணளவு 5 கொண்ட வெக்டர்கள் $= \pm 5\,\hat{a}$

$$= \pm 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) = \pm\left(2\sqrt{5}\,\vec{i} - \sqrt{5}\,\vec{j}\right)$$

எ.கா. 2.21: $2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $6\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமை புள்ளிகள் என நிரூபி.

தீர்வு :

புள்ளிகளை A, B, C எனவும் ஆதிப்புள்ளியை O எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}\ ;\ \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\ ;\ \overrightarrow{OC} = 6\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right) - \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}\right)$$

$$= \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left(6\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}\right) - \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 12\vec{k} = 4\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 4\,\overrightarrow{AB}$$

எனவே $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ இணையான வெக்டர்கள். மேலும் அவைகளுக்குப் பொதுவான புள்ளி A ஆகும்.

$\therefore$ A, B, C ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகளாகும்.

எ.கா. 2.22:

A, B என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $3\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$, $5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ எனில் $\overrightarrow{AB}$ -ஐக் கண்டுபிடித்து அதன் எண்ணளவினையும், திசைக் கொசைன்களையும் காண்க.

தீர்வு : O என்பது ஆதிப்புள்ளி எனில்,

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k},\ \overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right) - \left(3\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2)^2 + (11)^2 + (10)^2} = 15$$

திசைக் கொசைன்கள் $\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{10}{15}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.2

(1) $4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $-2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களின் கூடுதலையும், கூடுதலின் எண்ணளவினையும் காண்க.

(2) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ எனில் $\left|2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}\right|$ -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

(3) ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளான A,B,C-யின் நிலை வெக்டர்கள் $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$ எனில் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் வெக்டர்களையும் அப்பக்கங்களின் நீளங்களையும் காண்க,

(4) கொடுக்கப்பட்ட நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமை என நிரூபிக்க.

(i) $-2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $7\vec{i} - \vec{k}$

(ii) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $-7\vec{j} + 10\vec{k}$

(5) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -6\vec{i} + m\vec{j}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரே கோட்டமை வெக்டர்கள் எனில் m-ன் மதிப்பு காண்க..

(6) $\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் ஓரலகு வெக்டர் காண்க.

(7) $3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ மற்றும் $-2\vec{j} - 2\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கு இணையாக உள்ள ஓரலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

(8) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ எனில் $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான ஓரலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

(9) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $5\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $6\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ எனில் அம்முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிரூபிக்க.

(10) $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

(11) $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

(12) $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள், ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிப் புள்ளிகளாக இருப்பின் அதன் நடுக்கோட்டுச் சந்தியின் (centroid) நிலை வெக்டர் காண்க.

(13) P, Q என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே

$\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ எனில் $\overrightarrow{PQ}$ -ஐக் கண்டுபிடித்து அதன் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(14) கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் ஒரே தள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

(i) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $-2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $-\vec{j} + 2\vec{k}$

(ii) $5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$, $7\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$, $3\vec{i} + 20\vec{j} + 5\vec{k}$

(15) $4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $-\vec{j} - \vec{k}$, $3\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k}$, $-4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன என நிரூபிக்க.

(16) $\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $7\vec{j} + 5\vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரே தள வெக்டர்களா என்பதனைச் சரிபார்க்க.

3. இயற்கணிதம்

3.1 பகுதிப் பின்னங்கள் **(Partial Fractions) :**

வரையறைகள்:

விகிதமுறு கோவை: $p(x)$, $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தி $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்ற வடிவத்தில் எழுதும் கோவையினை விகிதமுறு கோவை என்பர். இங்கு $q(x) \neq 0$

$\frac{5x - 2}{x^2 + 3x + 2}, \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 22}$ என்பவை விகிதமுறு கோவைக்கு உதாரணங்கள்.

தகுப் பின்னம் : ஒரு விகிதமுறு கோவையில் தொகுதியின் படியானது பகுதியின் படியை விடக் குறைவாக இருப்பின் அதனைத் தகுப் பின்னம் என்பர்.

$\frac{3x + 1}{x^2 + 4x + 3}, \quad \frac{7x^2 + 9}{x^3 + x^2 - 5}$ என்பவை தகுப் பின்னங்களுக்கு உதாரணங்களாகும்.

தகாப் பின்னம் : ஒரு விகிதமுறு கோவையில் தொகுதியின் படியானது பகுதியின் படிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால் அதனைத் தகாப் பின்னம் என்பர்.

$\frac{x^3 + 5x^2 + 4}{x^2 + 2x + 3}, \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 3}$ என்பவை தகாப் பின்னங்களுக்கு உதாரணங்களாகும்.

பகுதிப் பின்னம் :

$\frac{7}{x - 2}$ மற்றும் $\frac{5}{x - 1}$ என்பவைகளின் கூடுதலைக் காண்பதாகக் கொள்வோம். இதனை

$\frac{7}{x - 2} + \frac{5}{x - 1} = \frac{7(x - 1) + 5(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{7x - 7 + 5x - 10}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{12x - 17}{(x - 2)(x - 1)}$ என எழுதலாம்.

மறுதலையாக $\frac{12x - 17}{(x - 2)(x - 1)}$ என்ற பின்னத்தினை $\frac{7}{x - 2} + \frac{5}{x - 1}$ என எழுதும் முறையைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தெழுதுதல் என்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தகுப் பின்னத்தினை அதன் பகுதியின் காரணிகளுக்கு ஏற்ப எளிய பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுதும் முறையை பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் என்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட பின்னம் $\frac{p(x)}{q(x)}$, ஒரு தகாப் பின்னமாக இருப்பின் $p(x)$ஐ $q(x)$-ஆல் வகுத்து, பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் தகுபின்னத்தின் கூடுதலாக மாற்ற வேண்டும். அதன் பின்னர் தகுபின்னத்தை, பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

செயல்முறை :

$\frac{p(x)}{q(x)}$ என்ற தகுப்பின்னம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. $q(x)$-ஐ பகா காரணிகளின் பெருக்கலாக மாற்ற வேண்டும்.

வகை 1: ஒரு படி காரணிகள் [ஒரே காரணி மீண்டும் வராமை]

$q(x)$-ல் வரக்கூடிய $ax + b$ என்ற ஒருபடிக் காரணிக்கு உகந்த எளிய பின்னம் $\frac{A}{ax+b}$ ஆகும். இங்கு A ஒரு பூச்சியமில்லாத மாறிலியாகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதியின் காரணிகள் ஒருபடிகளாக இருந்து மீண்டும் வராமலிருந்தால் கீழ்க்கண்டவாறு பிரிக்கலாம்.

$$\frac{x+3}{(x+5)(2x+1)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{2x+1}$$ இங்கு A, B என்ற மாறிலிகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

எ.கா. 3.1: $\frac{3x+7}{x^2-3x+2}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு :

பகுதியான $x^2 - 3x + 2$-ஐ ஒரு படிக்காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதலாம்.

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$$

$$\frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$ என்க.

$$\Rightarrow \quad \frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 7 = A(x-2) + B(x-1) \quad \ldots(1)$$

x-ன் அடுக்குகளின் குணகங்களைச் சமப்படுத்துக

x-ன் குணகம் : $A + B = 3$ … (2)

மாறிலி உறுப்பு : $-2A - B = 7$ … (3)

(2) மற்றும் (3)-லிருந்து

$$A = -10$$
$$B = 13$$

$$\therefore \frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{-10}{x-1} + \frac{13}{x-2} = \frac{13}{x-2} - \frac{10}{x-1}$$

குறிப்பு **:** A, B-ன் மதிப்புகளை *x*-க்கு தகுந்த மதிப்புகளை பிரதியிட்டும் காணலாம்.

A-ஐ காண, (1)-ல் $x = 1$ எனப் பிரதியிட

$$3(1) + 7 = A(1-2) + B(0)$$
$$10 = A(-1)$$
$$A = -10$$

B-ஐ காண (1)-ல் $x = 2$ எனப் பிரதியிட

$$3(2) + 7 = A(0) + B(2-1)$$
$$B = 13$$

$$\therefore \frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{-10}{x-1} + \frac{13}{x-2}$$

$$\frac{3x+7}{x^2-3x+2} = \frac{13}{x-2} - \frac{10}{x-1}$$

எ.கா. : 3.2: $\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ -ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு **:**

பகுதியான $(x^2 - 4)\ (x + 1)$-ஐ ஒரு படிகாரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதலாம்.

i.e. $(x^2-4)(x+1) = (x+2)(x-2)(x+1)$

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$ என்க.

இங்கு A, B, C-ஐ காணவேண்டும்.

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1) + B(x+2)(x+1) + C(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow x + 4 = A(x-2)(x+1) + B(x+2)(x+1) + C(x+2)(x-2) \quad \ldots (1)$$

A-ஐ காண, (1)-ல் $x = -2$ எனப் பிரதியிட

$$-2 + 4 = A(-2-2)(-2+1) + B(0) + C(0)$$
$$2 = 4A \Rightarrow A = 1/2$$

B-ஐ காண, (1)ல் $x = 2$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது $B = 1/2$

C-ஐ காண, (1)-ல் $x = -1$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது $C = -1$

$$\therefore \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{1/2}{(x+2)} + \frac{1/2}{(x-2)} + \frac{(-1)}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{x+1}$$

வகை 2: ஒரு படிக்காரணிகள் [காரணிகள் மீண்டும் வருதல்]

கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதியில் $ax + b$ என்ற ஒருபடிக் காரணி n முறை திரும்ப வருமாயின், அதற்குரிய எளிய பின்னம்,

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

இங்கு $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ மாறிலிகள் ஆகும்.

எ.கா. 3.3: $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$ -ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு :

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad 9 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) \quad \ldots (1)$$

A-ஐ காண, (1)-ல் $x = 1$ எனப் பிரதியிட

நாம் பெறுவது $9 = A(1+2)^2 \Rightarrow A = 1$

C-ஐ காண, (1)-ல் $x = -2$ எனப் பிரதியிட

நாம் பெறுவது $9 = C(-2-1) \Rightarrow C = -3$

(1)-ல் x^2-ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$A + B = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + B = 0 \quad \Rightarrow B = -1$$

$$\therefore \frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

வகை 3: இருபடிக் காரணிகள் [காரணி மீண்டும் வராமை]

$ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடிக் காரணி, ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கலாக மாற்ற இயலாதபடி ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியில் வருமாயின்,

அதற்குரிய பகுதிப் பின்னம் $\dfrac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ ஆகும். A, Bஆகியவை ஒரே நேரத்தில் பூச்சியமல்லாத மாறிலிகள்.

$\dfrac{2x}{(x + 1)(x^2 + 1)}$ என்ற பின்னத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இந்த தகுப் பின்னத்தை $\dfrac{2x}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1}$ என எழுதலாம்.

$x + 1$ என்ற காரணியின் படி 1-ஆக இருப்பதால் அதற்குரிய பின்னத்தின் தொகுதியில் A என்ற மாறிலி மட்டும் உள்ளது. $x^2 + 1$ என்ற காரணியின் படி 2ஆகவும் ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுத முடியாதபடி உள்ளது. அதற்குரிய பின்னத்தின் தொகுதியில் ஒருபடிக் கோவை $Bx + C$ உள்ளது.

எ.கா. 3.4: $\dfrac{x^2 - 2x - 9}{(x^2 + x + 6)(x + 1)}$ -ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு :

$$\frac{x^2 - 2x - 9}{(x^2 + x + 6)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 6} + \frac{C}{x + 1} \text{ என்க}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 - 2x - 9}{(x^2 + x + 6)(x + 1)} = \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + x + 6)}{(x^2 + x + 6)(x + 1)}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 9 = (Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + x + 6) \qquad \ldots (1)$$

C-ஐ காண, (1)-ல் $x = -1$ எனப் பிரதியிட

நாம் பெறுவது $1 + 2 - 9 = C(1 - 1 + 6) \Rightarrow C = -1$

B-ஐ காண, (1)-ல் $x = 0$ எனப் பிரதியிட

நாம் பெறுவது $-9 = B + 6C$

$-9 = B - 6 \quad \Rightarrow \quad B = -3$

A-ஐ காண, (1)-ல் $x = 1$ எனப் பிரதியிட

$1 - 2 - 9 = (A - 3)(2) + (-1)(8) \Rightarrow -10 = 2A - 14$

$A = 2$

$$\therefore \quad \frac{x^2 - 2x - 9}{(x^2 + x + 6)(x + 1)} = \frac{2x - 3}{x^2 + x + 6} - \frac{1}{x + 1}$$

எ.கா. 3.5: $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6}$ -ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு :

இங்கு பகுதியும், தொகுதியும் ஒரே படியினை கொண்டுள்ளது. எனவே இது தகாப் பின்னமாகும்.

வகுத்தலில் $$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{6x - 5}{x^2 - 5x + 6} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{6x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \text{ என்க}$$

$$6x - 5 = A(x - 3) + B(x - 2)$$

$x = 2$ எனப் பிதியிட, $-A = 12 - 5 \Rightarrow A = -7$

$x = 3$ எனப் பிரதியிட, $B = 18 - 5 \Rightarrow B = 13$

$$\therefore \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{7}{x - 2} + \frac{13}{x - 3}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \quad \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 1 - \frac{7}{x - 2} + \frac{13}{x - 3}$$

பயிற்சி 3.1

கீழ்க்காணும் பின்னங்களை பகுதிப் பின்னங்களாக மாற்றுக.

(1) $\frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$ (2) $\frac{7x - 1}{6 - 5x + x^2}$ (3) $\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

(4) $\frac{1}{(x - 1)(x + 2)^2}$ (5) $\frac{x - 2}{(x + 2)(x - 1)^2}$ (6) $\frac{x + 1}{(x - 2)^2 (x + 3)}$

(7) $\frac{x^2 - 6x + 2}{x^2(x + 2)}$ (8) $\frac{2x^2 - 5x - 7}{(x - 2)^3}$ (9) $\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x^2 + 1)}$

(10) $\frac{x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$ (11) $\frac{7x^2 - 25x + 6}{(x^2 - 2x - 1)(3x - 2)}$ (12) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

3.2 வரிசை மாற்றங்கள் **(Permutations) :**

***காரணீயப் பெருக்கம்* (Factorial) :**

முதல் n இயல் எண்களின் தொடர் பெருக்கம் "n-ன் காரணீயப் பெருக்கம்" எனப்படும். இதனை $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ என்ற குறியீடுகள் மூலம் குறிக்கலாம்.

$$\text{i.e.}\quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n$$
$$5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

பூஜ்ய காரணீயப் பெருக்கல் :

காரணீய பெருக்கல் வரையறையின்படி இது 0 வரையிலான இயல் எண்களின் தொடர் பெருக்கத்தினைக் குறிக்கிறது. இக்கூற்றினை அறிவுப்பூர்வமாக ஏற்றுக்கொள்ள இயலாது. 0! ஆனது பிற்பகுதியில் பயன்படுவதால் 0!-ன் உண்மையான மதிப்பான 1-ஐ தற்போது வரையறையாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

***தருவி* (Deduction) :**

$$\begin{aligned} n\,! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n \\ &= [1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1)]n \\ &= [(n-1)!]\,n \\ n! &= n\,[(n-1)!] \end{aligned}$$

உதாரணமாக,

$$8\,! = 8(7\,!)$$

3.2.1 *எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்*
(Fundamental Principles of Counting):

இப்பகுதியில் இரண்டு அடிப்படை கொள்கைகளை விவாதிப்போம். அதாவது கூட்டலின் கொள்கை மற்றும் பெருக்கலின் கொள்கை. இவ்விரண்டு கொள்கைகளும், வரிசை மாற்றங்களையும், மற்றும் சேர்வுகளையும் தெளிவாக்குவது மட்டுமன்றி அவற்றின் ஆதாரமாகவும் உள்ளது.

பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை :

இரு பணிகளில் ஒன்றை m வழிகளிலும், அடுத்த பணியினை n வழிகளிலும் செய்ய முடியுமெனில், தொடர்ந்த இரு பணிகளையும் $m \times n$ வழிகளில் செய்ய முடியும்.

விளக்கம் :

முதல் பணியினைச் செய்து முடிக்கும் m வழிகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியை எடுத்துக் கொள்வோம். தற்போது முதல் பணியின் ஒரு வழியை எடுத்து இரண்டாவது பணியின் n வழிகளை இணைத்து மொத்தம் n

வழிகள் கிடைக்கும். இவ்வாறாக முதல் பணியில் உள்ள ஒவ்வொரு வழிக்கும் இரண்டாவது பணியுடன் இணைக்கும் பட்சத்தில் n வழிகள் கிடைக்கும். ஆனால் முதல் பணிக்கு m வழிகள் உள்ளதால், இரண்டு பணிகளையும் இணைத்து மொத்தம் mn வழிகள் கிடைக்கும்.

எ.கா. 3.6: ஒரு வகுப்பில் 15 மாணவர்களும் 20 மாணவிகளும் உள்ளனர். ஒரு நிகழ்ச்சிக்காக ஒரு மாணவனையும், ஒரு மாணவியையும் வகுப்பாசிரியர் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமென்றால் எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்க இயலும்?

தீர்வு :

இங்கு ஆசிரியருக்கு இரு பணிகள் உள்ளன.

(i) 15 மாணவர்களில் ஒரு மாணவனைத் தேர்வு செய்தல்

(ii) 20 மாணவிகளில் ஒரு மாணவியைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

முதல் பணியினை (தேர்வினை) 15 வழிகளிலும், இரண்டாவது பணியினை 20 வழிகளிலும் செய்து முடிக்கலாம்.

எனவே பெருக்கலின் அடிப்படை கொள்கையின்படி மொத்த வழிகள் $15 \times 20 = 300$ ஆகும்.

கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை :

இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக சார்பற்ற முறையில் முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், முதல் பணி அல்லது இரண்டாம் பணியினை $(m + n)$ வழிகளில் செய்ய முடியும்.

எ.கா. 3.7: ஒரு வகுப்பில் 20 மாணவர்களும் 10 மாணவிகளும் உள்ளனர். ஒரு நிகழ்ச்சிக்காக ஒரு மாணவனையோ அல்லது ஒரு மாணவியையோ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமெனில் எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

தீர்வு :

இங்கு ஆசிரியருக்கு இரண்டுவிதமான பணிகளில் ஏதேனும் ஒரு பணி மூலமாகப் பணியினை நிறைவு செய்யலாம்.

(i) 20 மாணவர்களில் ஒரு மாணவனைத் தேர்வு செய்தல் (அல்லது)

(ii) 10 மாணவிகளில் ஒரு மாணவியைத் தேர்வு செய்தல்.

முதல் பணி 20 வழிகளிலும் இரண்டாவது பணி 10 வழிகளிலும் செய்யலாம்.

கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி இரு பணிகளில் ஏதேனும் ஒன்றைச் செய்து முடிக்க $20 + 10 = 30$ வழிகள் உள்ளன.

எனவே 30 வழிகளில் ஆசிரியர் ஒரு மாணவனையோ அல்லது ஒரு மாணவியையோ தேர்ந்தெடுக்க முடியும்.

எ.கா. 3.8: *ஓர் அறைக்கு 10 கதவுகள் உள்ளன. ஒருவர், ஒரு கதவு வழியாக உள்ளே சென்று பிற கதவு வழியாக வெளியே வரவேண்டுமென்றால் எத்தனை வழிகளில் வரமுடியும்?*

தீர்வு :

10 கதவுகள் உள்ளதால் உள்ளே செல்ல 10 வழிகள் உள்ளன. வெளியே வர பிற 9 கதவுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும். எனவே வெளியே வருவதற்கு 9 வழிகள் உள்ளன. ஆகையால் ஒரு கதவு வழியாகச் சென்று இன்னொரு கதவு வழியாக வெளியே வர $10 \times 9 = 90$ வழிகள் உள்ளன.

எ.கா. 3.9: *ஆங்கிலத்தில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி அர்த்தமுள்ள அல்லது அர்த்தமற்ற 3 வெவ்வேறு எழுத்து வார்த்தைகள் எத்தனை உருவாக்க இயலும்?*

தீர்வு :

ஆங்கிலத்தில் உள்ள மொத்த எழுத்துகள் = 26, உருவாக்கப்பட வேண்டிய 3 எழுத்து வார்த்தையின் முதல் இடத்தினை 26 வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம். ஏற்கனவே உள்ள எழுத்துகள் வரக்கூடாது என்பதால் இரண்டாம் இடத்தினை 25 வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம். இதே போன்று மூன்றாவது இடத்தினை மீதமுள்ள 24 எழுத்துகள் மூலம் 24 வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்.

எனவே நமக்கு கிடைக்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

$$= 26 \times 25 \times 24 = 15600$$

எ.கா. 3.10:

1, 2, 3, 4 மற்றும் 5 ஆகிய இலக்கங்களைக் கொண்டு எத்தனை மூன்றிலக்க எண்கள் உருவாக்க இயலும்?

தீர்வு :

இங்கு ஒருமுறை பயன்படுத்திய எண் மீண்டும் பயன்படுத்தலாம். எனவே 1-ம் இலக்க இடத்தை 5 வழிகளிலும் 10-ம் இலக்க இடத்தை 5 வழிகளிலும், 100-ம் இலக்க இடத்தை 5 வழிகளிலும் நிறைவு செய்யலாம்.

$\therefore$ *நமக்கு கிடைக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை* $= 5 \times 5 \times 5 = 125$

எ.கா. 3.11: *ஒரு தேர்வுத்தாளில் 6 பல்வாய்ப்பு விடையளி வினாக்கள் உள்ளன. இதில் மூன்று வினாக்களுக்கு 4 வாய்ப்புகளும் அடுத்த மூன்று வினாக்களுக்கு 5 வாய்ப்புகளும் உள்ளன. 6 வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க எத்தனை வித்தியாசமான தொடராக விடையளிக்க இயலும்?*

தீர்வு :

இங்கு 6 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும்.. முதல் முன்று வினாக்களுக்கு முறையே 4 வழிகளிலும் அடுத்த மூன்று வினாக்களுக்கு முறையே 5 வழிகளிலும் விடையளிக்கலாம்.

எனவே விடையளிக்கும் வித்தியாசமான தொடர்களின் எண்ணிக்கை

$= 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 8000$

எ.கா. 3.12: 4, 5, 6, 7, 8 *ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி எண்* 600*க்கு மேலாக எத்தனை மூன்று இலக்க எண்கள் உருவாக்கலாம்?*

தீர்வு :

இங்கு ஒரே இலக்கத்தினை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம். 600*க்கு மேலாக இருக்க வேண்டுமென்பதால்* 100*ம் இலக்க இடத்தில்* 6, 7, 8 *ஆகிய இலக்கங்களை மட்டுமே பயன்படுத்தலாம். எனவே* 100*-ம் இலக்க இடத்தினை* 3 *வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்.*

10*-ம் இலக்க இடத்தினையும்* 1*-ம் இலக்க இடத்தினையும் கொடுக்கப்பட்ட* 5 *இலக்கங்களையும் கொண்டு நிறைவு செய்யலலாம். எனவே* 10*ம் இலக்க இடத்தினை* 5 *வழிகளிலும்,* 1*-ம் இலக்க இடத்தினை* 5 *வழிகளிலும் நிறைவு செய்யலாம்.*

எனவே உருவாகும் எண்களின் எண்ணிக்கை $= 3 \times 5 \times 5 = 75$

எ.கா. 3.13: 5000 *மற்றும்* 6000*க்கு இடையில்* 5, 6, 7, 8, 9 *ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி* 5*-ஆல் வகுபடும் எண்கள் எத்தனை உள்ளன?*

தீர்வு :

1000*-ம் இலக்க இடத்தில்* 5 *மட்டுமே இருக்க இயலும்.* 5*-ஆல் வகுபட வேண்டியதால்,* 1*-ம் இலக்க இடத்தில்* 5 *மட்டுமே இருக்க இயலும்.* 100*-ம் இலக்க இடத்திலும்,* 10*-ம் இலக்க இடத்திலும் .* 5, 6, 7, 8, 9 *ஆகிய எந்த இலக்கங்களையும் பயன்படுத்தலாம்.*

எனவே 1000*-ம் இலக்க இடத்தை* 1 *வழியிலும்*

100*-ம் இலக்க இடத்தை* 5 *வழிகளிலும்*

10*-ம் இலக்க இடத்தை* 5 *வழிகளிலும்*

1*-ம் இலக்க இடத்தை* 1 *வழியிலும் நிறைவு செய்யலாம்.*

எனவே மொத்த எண்கள் $=1 \times 5 \times 5 \times 1 = 25$

எ.கா. 3.14: 4, 5, 6, 7, 8, 9 *ஆகிய இலக்கங்களைக் கொண்டு* 3 *இலக்க ஒற்றைப்படை எண்கள் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு எத்தனை எழுதலாம்?*

(i) *இலக்கங்களைத் திரும்ப பயன்படுத்தல் கூடாது.*

(ii) *இலக்கங்களைத் திரும்ப பயன்படுத்தலாம்.*

தீர்வு :

ஒற்றைப்படையாக இருக்க 1*-ம் இலக்க எண்* 5, 7 *அல்லது* 9*ஆக இருக்க வேண்டும். எனவே* 1*-ம் இலக்கத்தினை* 3 *வழிகளில் எழுதலாம்.*

(i) *இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்த முடியாமையால்* 10*-ம் இலக்க இடத்தைப் பிற* 5 *எண்கள் மூலம்* 5 *வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்.* 100*-ம் இலக்க இடத்தை மீண்டும் மீதி உள்ள* 4 *இலக்கங்கள் மூலம்* 4 *வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்.*

எனவே மொத்த எண்களின் எண்ணிக்கை $= 3 \times 5 \times 4 = 60$

(ii) இலக்கங்களைத் திரும்ப பயன்படுத்துவதால், 10-ம் இலக்க இடத்தினையும் 100-ம் இலக்க இடத்தினையும் முறையே 6 வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்.

எனவே மொத்த எண்களின் எண்ணிக்கை $= 3 \times 6 \times 6 = 108$

பயிற்சி 3.2

1. ஒரு வகுப்பில் 27 மாணவர்களும் 14 மாணவிகளும் உள்ளனர். ஆசிரியர் ஒரு மாணவனையும் ஒரு மாணவியையும் ஒரு போட்டிக்காகத் தேர்வு செய்ய வேண்டுமெனில் எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?
2. வெவ்வேறு நிறங்களைக் கொண்ட 7 கொடிகள் மூலம் ஒரு அடையாளத்திற்கு இரண்டு கொடிகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக அமையும்படி இருக்க வேண்டுமானால் எத்தனை வித்தியாசமான அடையாளங்கள் உருவாக்க இயலும்?
3. ஒருவர் ஒரு கடையில் ஒரு மை பேனா, உருட்டுப் பேனா மற்றும் ஒரு பென்சில் வாங்க விரும்பினார். 10 மை பேனா வகைகள், 12 உருட்டுப்பேனா வகைகள் மற்றும் 5 பென்சில் வகைகள் இருந்தால் தேவையானவற்றைத் தேர்வு செய்ய எத்தனை வழிகளைப் பயன்படுத்தலாம்?
4. 12 மாணவர்கள் கலந்து கொள்ளும் ஒரு போட்டியில் முதல் 3 பரிசுகளை எத்தனை வழிகளில் அளிக்கலாம்?
5. 36 ஆசிரியர்களைக் கொண்ட ஒரு கல்லூரியில் ஒரு முதல்வர், ஒரு துணை முதல்வர் மற்றும் ஒரு பொறுப்பாசிரியரைத் தேர்ந்தெடுக்க எத்தனை வழிகளில் முடியும்?
6. ஒரு தேர்வுத் தாளில் 6 பல்வாய்ப்பு விடையளி வினாக்கள் உள்ளன. இதில் மூன்று வினாக்களுக்கு 4 வாய்ப்புகள் மற்றும் அடுத்த 3 வினாக்களுக்கு 2 வாய்ப்புகள் உள்ளன. 6 வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க வித்தியாசமான எத்தனை தொடராக விடையளிக்க இயலும்?
7. 500 மற்றும் 1000-க்கு இடையில் ஒரே ஒரு இலக்கம் மட்டும் 8ஆக இருக்கும்படி எத்தனை எண்கள் உள்ளன?
8. (i) 1-ம் இலக்க எண் பூச்சியமின்றி இலக்கங்கள் மீண்டும் பயன்படுத்தாமல்

   (ii) 1-ம் இலக்க எண் பூச்சியமின்றி இலக்கங்கள் மீண்டும் பயன்படுத்தி எத்தனை 5 இலக்க எண் பெயர்ப் பலகைகள் தயாரிக்கலாம்?

9. 2, 3, 0, 7, 9, 5 ஆகிய இலக்கங்களை ஒருமுறை பயன்படுத்தி எத்தனை 6 இலக்க எண்கள் உருவாக்க இயலும்?

10. 1000க்கு குறைவானதாக 0, 3, 5, 7 ஆகிய இலக்கங்களை ஒருமுறை பயன்படுத்தி எத்தனை ஒற்றைப்படை எண்கள் உருவாக்க இயலும்?

11. ஒரு தேர்வர், 5 சரி/தவறு வகை வினாக்களை எத்தனை வகைகளில் விடையளிக்கலாம்?

12. எத்தனை 4 இலக்க எண்கள் உள்ளன?

13. (i) ஒரே எழுத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தியும்

    (ii) ஒரே எழுத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தாமலும்

    a, b, c, d, e ஆகிய எழுத்துகளாலான 3 எழுத்து வார்த்தைகள் எத்தனை உள்ளது?

14. ஒரு நாணயத்தினை 5 முறை சுண்டும் போது கிடைக்கும் வெளியீடுகளைப் பதிவு செய்தால் எத்தனை விதமான பதிவுகள் கிடைக்க வாய்ப்பு உள்ளது?

3.2.2 வரிசை மாற்றங்களின் கருத்தியல் :

வரிசை மாற்றம் என்பது தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்துவது ஆகும். உதாரணமாகக் கொடுக்கப்பட்ட a, b, c என்ற 3 எழுத்துகளிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு 2 எழுத்துகளைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும் எனக் கொள்க. அவை ab, ba, bc, cb, ac, ca ஆகும். அதாவது 3 எழுத்துகளிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு 2 எழுத்துகளாக 6 வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம். இதனை $3P2 = 6$ என எழுதலாம்.

வரையறை :

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை எடுத்து வரிசைப்படுத்தும் விதங்களின் எண்ணிக்கையை, n பொருட்களிலிருந்து ஒரு நேரத்தில் r பொருட்களை எடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை எனலாம்.

குறியீடு :

n, r என்பவை மிகை முழு எண்களாக இருந்து $1 \leq r \leq n$ என இருக்குமானால், n பொருட்களிலிலிருந்து ஒரு நேரத்தில் r பொருட்களை எடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை $P(n, r)$ அல்லது nPr என்ற குறியீட்டினால் குறிப்பிடலாம். நாம் nPr என்றே குறிப்பிடுவோம்.

குறிப்பு : பொருட்கள் சமமாக இருந்து வரிசை மாறியிருந்தால் அதனை வேறு வரிசை மாற்றமாகக் கருதப்படும்.

எ.கா. 3.15: E என்ற எழுத்து முதல் எழுத்தாக இருந்து A, E, I, O, U ஆகிய எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி 3 எழுத்துகள் எடுத்தால் கிடைக்கும் வரிசை மாற்றங்களை எழுதுக.

தீர்வு :

EAI, EIA, EIO, EOI, EOU, EUO, EAO, EOA, EIU, EUI, EAU, EUA.

மொத்தம் 12 வரிசை மாற்றங்கள் உண்டு.

தேற்றம் 3.1:

n, r என்ற மிகை முழு எண்களை $1 \leq r \leq n$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு எடுத்துக் கொள்வோம். n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை எடுத்தால் கிடைக்கக்கூடிய வரிசை மாற்றங்கள் $n(n-1)\,(n-2)\ldots\left(n-\overline{r-1}\right)$ ஆகும்.

அதாவது $n\text{P}r = n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\left(n-\overline{r-1}\right)$

நிரூபணம் :

தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை என்பது r காலியான இடங்களை n பொருட்களைக் கொண்டு நிரப்புவது ஆகும்.

□ □ □ … □

1 2 3 r

முதல் இடத்தை n பொருட்களிலிருந்து எவையேனும் ஒரு பொருள் கொண்டு n வகைகளில் நிரப்பலாம்.

இரண்டாவது இடத்தை மீதியுள்ள $(n-1)$ பொருட்களிலிருந்து

எவையேனும் ஒரு பொருளைக் கொண்டு $(n-1)$ வகைகளில் நிரப்பலாம்.

மூன்றாவது இடத்தை மீதியுள்ள $(n-2)$ பொருட்களிலிருந்து

எவையேனும் ஒரு பொருளைக் கொண்டு நிரப்பலாம்.

இவ்வாறாக முதல் மூன்று இடங்களை $n(n-1)\,(n-2)$ வழிகளில் நிரப்பலாம். இதே போன்று r இடங்களை

$n(n-1)\,(n-2)\ldots\, r$ காரணிகள் (அதாவது)

$n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\left(n-\overline{r-1}\right)$ வகைகளில் நிரப்பலாம்.

$\therefore\ n\text{P}r = n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\left(n-\overline{r-1}\right) = n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1)$

தேற்றம் 3.2:

n, r என்பவை $1 \leq r \leq n$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்ட மிகை முழு எண்களானால், $n\text{P}r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

நிரூபணம் :

$$nPr = n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{r-1})$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{r-1})\ (n-r)\ (n-\overline{r+1})\ldots 2.1}{(n-r)\ (n-\overline{r+1})\ \ldots\ 2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

தேற்றம் 3.3:

n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் எல்லாவற்றினையும் எடுத்தால் கிடைக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $n!$ ஆகும்.

நிரூபணம் : $nPr = n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{r-1})$

$r = n$ எனப் பிரதியிட்டால் $nPn = n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{n-1})$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{n-1})$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

$$= n!$$

$$\therefore nPn = n!$$

குறிப்புரை : $0! = 1$ என ஏற்கனவே எடுத்துக் கொண்டோம். இதனைத் தற்போது நிரூபிக்கலாம்.

$nPr = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ என்பதனை அறிவோம்

$r = n$ எனப் பிரதியிட்டால் $nPn = \dfrac{n!}{(n-n)!}$

$$\Rightarrow \quad n! = \frac{n!}{0!} \quad (\because nPn = n!)$$

$$\Rightarrow \quad 0! = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$0! = 1$$

எ.கா. 3.16: $8P_3$-ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு :

$$8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{(8\times 7\times 6)\times 5!}{5!}$$

$$= 8\times 7\times 6$$

$$= 336$$

எ.கா. 3.17 : $5Pr = 6P_{r-1}$ எனில் *r*-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : $5Pr = 6P_{r-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6!}{(6-\overline{r-1})!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6 \times 5!}{(7-r)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6 \times 5!}{\{(7-r)(6-r)\}(5-r)!}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{6}{(7-r)(6-r)}$$

$$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r) = 6 \quad \Rightarrow \quad 42 - 7r - 6r + r^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-9)(r-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 9 \text{ or } r = 4$$

$\Rightarrow \quad r = 4 \quad$ ($\because$ $5Pr$ அர்த்தமுள்ளதாக இருக்க $r \leq 5$)

எ.கா. 3.18: $nP_4 = 360$ *எனில்* n*-ன் மதிப்பு காண்க.*

தீர்வு : $nP_4 = 360 \quad \Rightarrow \quad \frac{n\,!}{(n-4)\,!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$$\Rightarrow \quad \frac{n\,!}{(n-4)\,!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = \frac{6!}{2!}$$

$$\Rightarrow \quad n! = 6!$$

$$\Rightarrow \quad n = 6$$

எ.கா. 3.19: $9Pr = 3024$ *எனில்* r*-ன் மதிப்பு காண்க.*

தீர்வு : $9Pr = 3024$

$$\Rightarrow \quad = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 9P_4$$

$$\Rightarrow \quad r = 4$$

எ.கா. 3.20: $(n-1)P_3 : nP_4 = 1 : 9$ *எனில்* n*-ன் மதிப்பு காண்க.*

தீர்வு : $(n-1)P_3 : nP_4 = 1 : 9$

$\Rightarrow (n-1)(n-2)(n-3) : n(n-1)(n-2)(n-3) = 1 : 9$

$\Rightarrow$ i.e. $9(n-1)(n-2)(n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)$

$\Rightarrow n = 9$

எ.கா. 3.21: 5 *குழந்தைகள் ஒரு கியூ வரிசையில் நிற்க எத்தனை விதங்களைக் கையாளலாம்?*

தீர்வு : 5 குழந்தைகளை ஒரு நேர் வரிசையில் நிற்க வைக்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கையும், 5 வித்தியாசமான பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்துப் பொருட்களையும் எடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

எனவே விதங்களின் எண்ணிக்கை $= {}_5P_5 = 5! = 120$

எ.கா.3.22: *வித்தியாசமான நிறங்களில் உள்ள 6 கொடிகளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை விதங்களில் அடையாளங்களை (signals) உருவாக்க இயலும்?*

***தீர்வு* :**

1, 2, 3, 4, 5 *அல்லது* 6 *கொடிகளைப் பயன்படுத்தி விதவிதமான அடையாளங்களை உருவாக்கலாம்.* 6 *கொடிகளில் ஒரே நேரத்தில்* r *கொடிகளை எடுப்பதால் உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை* $6P_r$ *ஆகும்.*

எனவே கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி, மொத்த அடையாளங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}_6P_1 + {}_6P_2 + {}_6P_3 + {}_6P_4 + {}_6P_5 + {}_6P_6$$

$$= 6 + (6 \times 5) + (6 \times 5 \times 4) + (6 \times 5 \times 4 \times 3) + (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) + (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$$

$$= 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$$

எ.கா. 3.23: ‘NUMBER’ *என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துகளிலிருந்து அர்த்தமுள்ள அல்லது அர்த்தமற்ற* 4 *எழுத்து வார்த்தைகளை உருவாக்க இயலும்?*

***தீர்வு* :** ‘NUMBER’ *என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை* 6 *ஆகும். எனவே* 4 *எழுத்து வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கையும்* 6 *பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில்* 4 *பொருட்கள் எடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையும் சமம்.*

வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= {}_6P_4 = 360$

எ.கா. 3.24: *ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள* 4 *சகோதரர்கள் மற்றும்* 3 *சகோதரிகளை வரிசையாக உட்கார வைத்து எத்தனை விதங்களில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு நிழற்படம் எடுக்க இயலும்?*

(i) *எல்லா சகோதரிகளும் தொடர்ந்து உட்கார வேண்டும்.*

(ii) *எல்லா சகோதரிகளும் தொடர்ந்து உட்காரக் கூடாது.*

***தீர்வு* :** (i)3 *சகோதரிகளையும் பிரிக்க முடியாததால், அவர்களை ஒரே பொருளாகக் கொள்ள வேண்டும்.*

4 *சகோதரர்களுடன் இவர்களைச் சேர்க்கும்போது மொத்தம்* 5 *எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகிறது.*

எனவே இந்த ஐவரையும் 5! *எண்ணிக்கையில் அமர வைக்கலாம்.*

இதிலுள்ள ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 3 *சகோதரிகளும் தொடர்ந்து அமர்ந்துள்ளார்கள் என்பதைக் கவனிக்கவும். இவர்களைத் தமக்குள்* 3! *விதங்களில் அமர்ந்து கொள்ளலாம்.*

எனவே மொத்த விதங்களின் எண்ணிக்கை $= 5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$

(ii) எந்தவித நிபந்தனையின்றி 7 பேரை வரிசையாக உட்கார வைக்கும் வரிசைகள் = 7! = 5040

எல்லா சகோதரிகளும் தொடர்ந்து உட்கார வைக்கும் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை = 720

எனவே சகோதரிகள் 3 பேரும் தொடர்ந்து உட்காராத வகையில் உருவாக்கும் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை = 5040 – 720 = 4320

3.2.3 *பலமுறை வரும் பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள்* (Permutations of objects not all distinct) :

n பொருட்களில் (ஒரே நேரத்தில் அத்தனையும் எடுக்கும் போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களில்) *p* பொருட்கள் ஒரே மாதிரியாகவும் *q* பொருட்கள் இன்னொரு மாதிரியாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம். இங்கு $p + q = n$, இப்போது *n* பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அத்தனையும் எடுக்கும் போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{n!}{p!\,q!}$

எ.கா. 3.25: 'APPLE' என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துகளை மாற்றியமைத்து எத்தனை வார்த்தைகளை உருவாக்கலாம்?

***தீர்வு* :** கொடுக்கப்பட்ட சொல்லில் 5 எழுத்துகள் உள்ளன. இவற்றில் P என்ற எழுத்து 2 முறையும் A, L, E என்ற எழுத்துகள் தலா ஒருமுறையும் வந்துள்ளது.

எனவே கிடைக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, அதாவது

வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$

எ.கா. 3.26: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி ஒற்றைப்படை இலக்கங்கள் ஒற்றைப்படை இடத்தில் வருமாறு எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

***தீர்வு* :** இங்கு 1, 1, 3, 3 ஆகிய ஒற்றைப்படை இலக்கங்களும் 4 ஒற்றைப்படை இடங்களும் உள்ளன (7 இலக்க எண்ணாக இருப்பதால்) எனவே ஒற்றைப்படை இலக்கங்களை $\dfrac{4!}{2!\,2!}$ வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்.

இதே போன்று மீதமுள்ள இரட்டைப்படை இலக்கங்களான 2, 2, 4 ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி 3 இரட்டைப்படை இடங்களை $\dfrac{3!}{2!}$ வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம். பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி கணக்கிடும்போது மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{3!}{2!} = 6 \times 3 = 18$$

எ.கா. 3.27: "MATHEMATICS" *என்ற வார்த்தைகளிலுள்ள எழுத்துகளை மாற்றியமைத்து எத்தனை வார்த்தைகளை உருவாக்கலாம்?*

***தீர்வு* :**

'MATHEMATICS' *என்ற வார்த்தையில்* 11 *எழுத்துகள் உள்ளன.* M, A, T *என்ற எழுத்துகள் தலா* 2 *முறை வந்துள்ளது. பிற எழுத்துகள் அனைத்தும் ஒருமுறை வந்துள்ளது.*

வித்தியாசமான வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = 4989600$

3.2.4 பொருட்கள் மீண்டும் ஒரே இடத்தில் இடம்பெறுவதை ஏற்றுக் கொள்ளும் வரிசை மாற்றங்கள் :

(Permutations when objects can repeat)

கீழ்க்காணும் உதாரணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

"3 *கூடைகளுக்கு* 2 *பந்துகளை எத்தனை வழிகளில் பகிர்ந்து அளிக்கலாம்?*"

A, B *என்ற பந்துகளை எடுத்துக் கொள்வோம். கீழ்க்காணும் வழிகளில் நாம் நிறைவு செய்யலாம்.*

கூடை 1	கூடை 2	கூடை 3
A	B	
B	A	
	A	B
	B	A
A		B
B		A
		AB
AB		
	AB	

i.e. 9 *வழிகள் உள்ளன. இதனை* $n^r = 3^2 = 9$ *என்றும் கண்டுபிடிக்கலாம்.*

இங்கு n^r *என்பது* n *இடங்களுக்கு* r *பொருட்களை மீண்டும் கொடுக்கலாம் என்ற முறையில் கணக்கிடப்பட்டுள்ள வழிகளின் எண்ணிக்கையாகும்.*

எ.கா. 3.28: 3 *கூடைகளுக்கு* 5 *பந்துகளை எத்தனை வழிகளில் பகிர்ந்தளிக்கலாம்?*

தீர்வு **:**

3 *இடங்களும்* 5 *பொருட்களும் உள்ளபடியால் வழிகளின் எண்ணிக்கை* $= 3^5 = 243$

எ.கா. : 3.29 : 4 *மாணவர்களுக்கு* 3 *பரிசுகளை கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எத்தனை வழிகளில் நிறைவு செய்யலாம்?*

(i) *எந்தவொரு மாணவனும் ஒன்றுக்கு மேலான பரிசு பெறுதல் கூடாது.*

(ii) *ஒரு மாணவன் எத்தனை பரிசுகள் வேண்டுமானாலும் பெறலாம்.*

(iii) *எந்தவொரு மாணவனும் அனைத்துப் பரிசுகளையும் பெறுதல் கூடாது.*

தீர்வு **:**

(i) 4 *மாணவர்களுக்கு* 3 *பரிசுகளை (திரும்ப கிடைக்காத வகையில்)* $_4P_3 = 4! = 24$ *வழிகளில் கொடுக்கலாம்.*

(ii) 4 *மாணவர்களுக்கு* 3 *பரிசுகளை (திரும்ப கொடுக்கும் வகையில்)* $n^r = 4^3 = 64$ *வழிகளில் கொடுக்கலாம்.*

(iii) 3 *பரிசுகளும் ஒரே மாணவனுக்குக் கிடைக்க* 4 *வழிகள் உள்ளன. எனவே அனைத்து பரிசுகளும் ஒரே மாணவன் பெறாத வகையில்* $64 - 4 = 60$ *வழிகளில் கொடுக்கலாம்.*

3.2.5 *வட்ட வரிசை மாற்றங்கள்* (Circular permutations):

இதுவரை ஒரே நேர்க்கோட்டின் வடிவில் வரிசை மாற்றங்களைப் பார்த்தோம். இப்போது வட்ட வடிவில் பொருட்களை வரிசைப்படுத்துதலைப் பார்க்கலாம். வட்ட வடிவில் முதல் இடமும் கடைசி இடமும் என்று ஒன்று கிடையாது.

நேர்க்கோட்டின் வடிவில் அமைந்த வரிசை மாற்றங்களை எளிய வரிசை மாற்றம் அல்லது ஒருபடி வரிசை மாற்றம் எனலாம். வட்ட வடிவில் அமைந்த வரிசை மாற்றங்களை வட்ட வரிசை மாற்றம் அல்லது மூடிய வரிசை மாற்றம் எனலாம்.

தேற்றம் **3.4:** *வெவ்வேறான* n *பொருட்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை* $(n-1)!$ *ஆகும்.*

நிரூபணம் **:** *வெவ்வேறான* n *பொருட்களை* $a_1, \ a_2, \dots, \ a_{n-1}, \ a_n$ *என்க.*

வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை x *என்க.*

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி ஒரு வரிசை மாற்றத்தினை எடுத்தக் கொள்வோம்.

இந்த வட்ட வரிசை மாற்றமானது கீழ் உள்ளவாறு n ஒருபடி வரிசை மாற்றத்தினை கொடுக்கிறது.

$$
\begin{array}{llll}
a_1, a_2, a_3, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\
a_2, a_3, a_4, & \ldots, & a_n, & a_1 \\
a_3, a_4, a_5, & \ldots, & a_1, & a_2 \\
\ldots \ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots \ldots & \ldots & \ldots & \\
a_n, a_1, a_2, & \ldots, & a_{n-2}, & a_{n-1}
\end{array}
$$

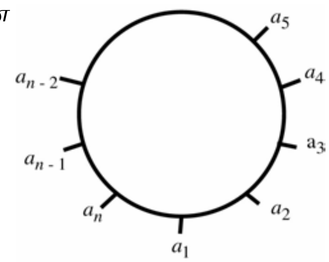


Fig. 3. 1

எனவே ஒவ்வொரு வட்ட வரிசை மாற்றமும் n ஒருபடி வரிசை மாற்றத்தினைக் கொடுக்கிறது.

ஆனால் நாம் x வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் உள்ளதாக எடுத்துள்ளோம்.

எனவே, மொத்த ஒருபடி வரிசை மாற்றங்கள் xn ஆகும்.

ஆனால் n பொருட்களில் ஒரே நேரத்தில் n பொருட்களை எடுக்கும்போது கிடைக்கக்கூடிய ஒருபடி வரிசை மாற்றங்கள் $n!$ ஆகும்.

$$\therefore xn = n!$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{n!}{n}$$

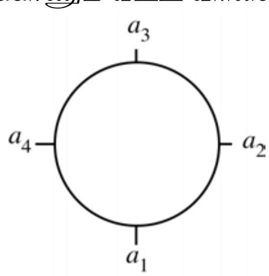
$$x = (n-1)!$$

$\therefore$ n பொருட்களால் கிடைக்கக்கூடிய வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n-1)!$ ஆகும்.

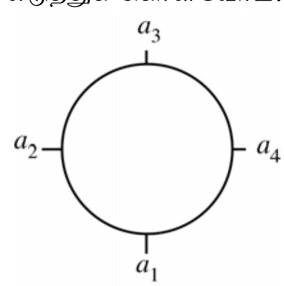
குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்ட தேற்றத்தில் வலஞ்சுழியாகவும் (clockwwise), இடஞ்சுழியாகவும் (anti-clockwise) எடுக்கப்படும் வரிசைகளை வெவ்வேறாகக் கருதப்படும்.

வலஞ்சுழி மற்றும் இடஞ்சுழி வரிசைகளின் வேறுபாடுகள் :

கீழ்க்காணும் வட்ட வரிசை மாற்றங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்:



படம் 3. 2



படம் 3. 3

இரு படங்களிலிருந்தும் வட்ட வரிசை அமைப்பை a_1, a_2, a_3, a_4 என எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆனால் படம் (3.2)ல் வரிசையானது

இடஞ்சுழியாகவும், படம் (3.3)ல் வலஞ்சுழியாகவும் இருப்பதைக் காண்க. எனவே இடஞ்சுழி மற்றும் வலஞ்சுழி இரண்டும் உள்ளடங்கிய வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n - 1)!$ ஆகும். இதில் சுழியைக் கணக்கில் கொள்ளாமல் எடுத்தால் கிடைக்கக்கூடிய வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் $\frac{1}{2}(n-1)!$ ஆகும்.

எ.கா. 3.30:

(i) ஒரே கோட்டில் (ii) வட்ட வடிவில், 10 பேரை உட்கார வைக்க எத்தனை வழிகளைக் கையாளலாம்?

தீர்வு :

(i) ஒரே நேர்க்கோட்டில் உட்கார வைக்க உள்ள வழிகள் = $_{10}P_{10} = 10!$

(ii) வட்ட வடிவில் உட்கார வைக்க உள்ள வழிகள் = $(10 - 1)! = 9!$

எ.கா. 3.31: 7 மணிகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு வளையத்தினை உருவாக்க எத்தனை வழிகள் உள்ளன?

தீர்வு :

இங்கு வளையத்தினை உருவாக்குவதால் சுழியினைத் தவிர்த்து விடலாம். எனவே வழிகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{1}{2}(7-1)! = \frac{6!}{2} = 360$

எ.கா. 3.32: ஒரு வட்ட மேசையில் 5 ஆண்கள் மற்றும் 5 பெண்கள், இரண்டு பெண்கள் தொடர்ந்து உட்காராதபடி அமர வேண்டுமானால், எத்தனை வழிகளைக் கையாளலாம்?

தீர்வு :

ஆண்களை வட்ட வடிவில் உட்கார வைக்க வழிகள் $(5 - 1)! = 4!$

இப்போது பெண்களை5! வழிகளில் தேர்ந்தெடுத்து அமர வைக்கலாம்.

எனவே மொத்த வழிகள் $= 4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$

எ.கா. 3.33: கொடுக்கப்பட்ட 8 பூக்களில் குறிப்பிட்ட 4 பூக்களைத் தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தி எத்தனை வழிகளில் மாலையாகத் தொடுக்கலாம்?

தீர்வு : தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்த வேண்டிய 4 பூக்களை ஒன்றாகக் கொள்க. எனவே கணக்கீட்டின்போது 5 பூக்கள் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். இதனைக் கொண்டு மாலையாகத் தொடுக்க 4! வழிகள் உள்ளன. ஆனால் தொடர்ச்சியாக உள்ள பூக்களை4! வழிகளில் தொடுக்கலாம்.

இரண்டு வழிகளையும் இணைத்து மொத்த வழிகள் = $4! \times 4! = 576$

பயிற்சி 3.3

1. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க:

   (i) $_5P_3$ (ii) $_{15}P_3$ (iii) $_5P_5$ (iv) $_{25}P_{20}$ (v) $_9P_5$

2. $_nP_4 = 20 \cdot {_nP_3}$ ஆக இருப்பின் n-ன் மதிப்பு காண்க.

3. $_{10}P_r = 5040$ எனில் r-ன் மதிப்பு யாது?

4. $_{56}P_{(r+6)} : {_{54}P_{(r+3)}} = 30800 : 1$ எனில், r-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

5. P_m என்பது $_mP_m$-ஐ குறிக்குமானால்

   $1 + 1.P_1 + 2.P_2 + 3.P_3 + \ldots + n.P_n = (n+1)!$ என நிரூபிக்க.

6. $_nP_r = {_{(n-1)}P_r} + r \cdot {_{(n-1)}P_{(r-1)}}$ என நிரூபிக்க.

7. நான்கு சட்டைகளும், 5 கால்சட்டைகளும். 6 தொப்பிகளும் உள்ளன. இதனை 3 நபர்கள் எத்தனை வழிகளில் அணியலாம்?

8. 'LOGARITHMS' என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு எத்தனை 4 எழுத்து அர்த்தமுள்ள அல்லது அர்த்தமற்ற வார்த்தைகள் உருவாக்கலாம்?

9. ஒவ்வொரு இலக்கமும் ஒற்றைப்படையாக இருந்து வெவ்வேறு இலக்கங்களாலான எத்தனை 3 இலக்க எண்கள் உருவாக்க இயலும்?

10. இலக்கங்கள் 2, 3, 4, 5 ஆகியவற்றை அனைத்தும் ஒரே நேரத்தில் பயன்படுத்தி எத்தனை எண்கள் உருவாக்கலாம்?

11. 'MISSISSIPPI' என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வித்தியாசமான வார்த்தைகள் எழுதலாம்?

12. (i) 'HARYANA' என்ற வார்த்தைகளிலுள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி எழுதும் வித்தியாசமான வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

    (ii) இவ்வார்த்தைகளில் Hஐ முதல் எழுத்தாகவும் N-ஐ கடைசி எழுத்தாகவும் உடையவை எத்தனை?

13. இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில் எத்தனை 4 இலக்க எண்கள் உள்ளன?

14. ஐந்து விதமான மோதிரங்களை 4 விதமான விரல்களில் எத்தனை வழிகளில் அணியலாம்?

15. எட்டு மாணவர்களை (i) ஒரே கோட்டில் (ii) வட்ட வடிவில், உட்கார வைக்க வேண்டுமானால் எத்தனை வழிகளில் முடியும்?

16. ஒரே மாதிரியான இருபது பூக்கள் உள்ள மாலையை எத்தனை வழிகளில் தொடுக்கலாம்?

3.3 சேர்வுகள் **(Combinations) :**

சேர்வுகள் என்பது தேர்ந்தெடுப்பதாகும். உதாரணமாக a, b மற்றும் c-யிலிருந்து ab, bc, ac என்ற மூன்று வித்தியாசமான முறையில் 2 எழுத்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். குறிப்பாக இங்கு வரிசை மாற்றத்தினைக் கணக்கில் கொள்வதில்லை. அதாவது ab மற்றும் ba இரண்டும் ஒரே தேர்வு ஆகும்.

***வரையறை* :**

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிமுறை சேர்வு ஆகும்.

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையினை ${}_nC_r$ அல்லது $C(n,r)$ அல்லது $\binom{n}{r}$ எனக் குறிப்பிடலாம். நாம் ${}_nC_r$ என்றே பயன்படுத்துவோம்.

எனவே ${}_nC_r$ = n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

வரிசை மாற்றத்திற்கும், சேர்வுக்கும் இடையேயான வேறுபாடுகள்:

1. *சேர்வில் தேர்வு மட்டுமே கணக்கில் கொள்ளப்படும். வரிசை மாற்றத்தில் தேர்வு மட்டுமின்றி அதன் வரிசையும் கணக்கில் கொள்ளப்படும்.*
2. *பொதுவாக வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை சேர்வின் தேர்வுகளின் எண்ணிக்கையை விட கூடுதலாக இருக்கும்.*
3. *ஒவ்வொரு சேர்வும் பல வரிசை மாற்றங்களுக்குத் தொடர்பானது.*

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களைத் தேர்வு செய்யும் சேர்வு:

***தேற்றம்* 3.5:**

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களைத் தேர்வு செய்யும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ஆகும்.

***நிரூபணம்* :**

n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையை ${}_nC_r$ என்க.

ஒவ்வொரு சேர்விலும் r பொருட்கள் உள்ளன. இவைகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்தினாலும் சேர்வு மாறுவதில்லை.

$\therefore$ 1 சேர்வில் உள்ள பொருட்களால் $r!$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கும்.

எனவே ${}_nC_r$ சேர்வுகளில் மூலம் ${}_nC_r \times r!$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கும்.

ஆனால் இவை n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை எடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

அதாவது $\quad {}_nC_r \,.\, r! = {}_nP_r$

$$\therefore {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \qquad \left(\because {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right)$$

பண்புகள்: (1) ${}_nC_n = 1$ (2) ${}_nC_0 = 1$ (3) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ $\quad 0 \le r \le n$

நிரூபணம் :

(1) $${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$ என்பதை அறிவோம்

$r = n$ எனில், $${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!\, n!} = \frac{n!}{0!\, n!} = 1$$

(2) $r = 0$ எனில்

$${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!\, 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(3) $${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,\left(n - \overline{n-r}\right)!} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} = {}_nC_r$$

குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்ட பண்பினை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம் :

அதாவது x மற்றும் y என்பவை குறையற்ற எண்களாயிருந்து

$x + y = n$ ஆக இருக்குமானால் ${}_nC_x = {}_nC_y$

(4) n, r என்பவை மிகை முழு எண்களாகவும் $r \le n$ எனுமாறும் இருப்பின் ${}_nC_r + {}_nC_{(r-1)} = {}_{(n+1)}C_r$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

$${}_nC_r + {}_nC_{(r-1)} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} + \frac{n!}{\left(n - \overline{r-1}\right)!\, (r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\, r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!\, (r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\, r\{(r-1)!\}} + \frac{n!}{(n-r+1)\, \{(n-r)!\, (r-1)!\}}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\, (r-1)!} \left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\, (r-1)!} \left\{\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right\}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\, (r-1)!} \left\{\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)\{n!\}}{(n-r+1)\,(n-r)!\,r(r-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\,r!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$= {}_{(n+1)}C_r$$

(5) n , r என்பவை மிகை முழு எண்களாகவும் $1 \le r \le n$ எனில்

$${}_nC_r = \frac{n}{r}\; {}_{(n-1)}C_{(r-1)}$$

நிரூபணம் :

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{\big[(n-1)-(r-1)\big]!\,r\,(r-1)!}$$

$$= \frac{n}{r}\quad \frac{(n-1)!}{\big[(n-1)-(r-1)\big]!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{n}{r}\quad {}_{(n-1)}C_{(r-1)}$$

(6) $1 \le r \le n$ எனில் $n \,.\, {}_{(n-1)}C_{(r-1)} = (n-r+1) \,.\, {}_nC_{(r-1)}$

நிரூபணம் : $n \,.\, {}_{(n-1)}C_{(r-1)} = n\left\{\frac{(n-1)!}{\big[(n-1)-(r-1)\big]!\,(r-1)!}\right\}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{(n-r+1)n!}{(n-r+1)\,(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$= (n-r+1)\left[\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}\right]$$

$$= (n-r+1)\left[\frac{n!}{\big(n-r-1\big)!\,(r-1)!}\right]$$

$$= (n-r+1) \,.\, {}_nC_{(r-1)}$$

(7) இரு மிகை முழு எண்கள் x, yக்கு

$${}_nC_x = {}_nC_y \Rightarrow x = y \text{ அல்லது } x + y = n$$

நிரூபணம் :

$$_nC_x = {_nC_y}$$

$$\Rightarrow \quad _nC_x = {_nC_y} = {_nC_{(n-y)}} \qquad [\because\ _nC_y = {_nC_{(n-y)}}]$$

$$\Rightarrow x = y \text{ or } x = n - y$$

$$\Rightarrow x = y \text{ or } x + y = n$$

குறிப்பு : $_nC_x = {_nC_y}$ *மற்றும்* $x \neq y$ *எனில்* $x + y = n$

எ.கா. 3.34: *பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :*

(i) $_6C_3$ (ii) $\sum\limits_{r=1}^{5} {_5C_r}$

தீர்வு :

(i) $$_6C_3 = \frac{_6P_3}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

(ii) $$\sum_{r=1}^{5} {_5C_r} = {_5C_1} + {_5C_2} + {_5C_3} + {_5C_4} + {_5C_5}$$

$$= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

எ.கா. 3.35: $_nC_4 = {_nC_6}$ *எனில்* $_{12}C_n$*-ஐ காண்க.*

தீர்வு : $_nC_4 = {_nC_6} \Rightarrow n = 4 + 6 = 10$

தற்பொழுது $_{12}C_n = {_{12}C_{10}}$

$$= {_{12}C_{(12-10)}} = {_{12}C_2} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2}$$

$$= 66$$

எ.கா. 3.36: $_{15}C_r : {_{15}C_{(r-1)}} = 11 : 5$ *எனில்* r*-ன் மதிப்பை காண்க.*

தீர்வு :

$$_{15}C_r : {_{15}C_{(r-1)}} = 11 : 5 \Rightarrow \frac{_{15}C_r}{_{15}C_{(r-1)}} = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{15!}{r!(15-r)!}}{\dfrac{15!}{(r-1)!\,(15-r+1)!}} = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{15!}{r!\,(15-r)!} \times \frac{(r-1)!\,(16-r)!}{15!} = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(r-1)!\,(16-r)\,\{(15-r)!\}}{r(r-1)!\,(15-r)!} = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16-r}{r} = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 5(16-r) = 11r \quad \Rightarrow \; 80 = 16r$$

$$\Rightarrow \quad r = 5$$

எ.கா. 3.37: *தொடர்ந்த r முழு எண்களின் பெருக்கல், $r!$ ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.*

தீர்வு : தொடர்ந்த r முழு எண்களை $n + 1, n + 2, n + 3, \ldots, n + r$ என்க.

$$\text{இதன் பெருக்கல்} = (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+r)$$

$$= \frac{1.2.3\ldots n.\,(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{(n+r)!}{n!}$$

$$\therefore \frac{\text{இதன் பெருக்கல்}}{r!} = \frac{(n+r)!}{n!\,r!}$$

$= {}_{(n+\mathrm{r})}C_r$ இது ஒரு முழு எண்.

$\therefore$ தொடர்ந்த r முழு எண்களின் பெருக்கல், $r!$ ஆல் வகுபடும்.

எ.கா. 3.38: *r, n என்பவை மிகை முழு எண்களாக இருந்து $1 \le r \le n$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்படுமானால்*

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{(r-1)}} = \frac{n-r+1}{r}$$

தீர்வு :

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{(r-1)}} = \frac{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{\dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \times \frac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{n!}$$

$$= \frac{(r-1)!\,(n-r+1)\,\{(n-r)!\}}{r(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n-r+1}{r}$$

எ.கா. 3.39 : *${}_nP_r = {}_nP_{(r+1)}$ மற்றும் ${}_nC_r = {}_nC_{(r-1)}$ ஆகவும் இருந்தால் n, r-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.*

தீர்வு :

$$_nP_r = {_nP_{(r+1)}} \Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n-r)\,(n-r-1)!} = \frac{1}{(n-r-1)!}$$

$$\Rightarrow n - r = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$_nC_r = {_nC_{(r-1)}} \Rightarrow \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)\,\{(n-r)!\}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{n-r+1}$$

$$\Rightarrow n - r + 1 = r$$

$$\Rightarrow n - 2r = -1 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)லிருந்து $n = 3$, $r = 2$

பயிற்சி 3.4

1. *பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக.*
   (i) $_{10}C_8$ (ii) $_{100}C_{98}$ (iii) $_{75}C_{75}$
2. $_nC_{10} = {_nC_{12}}$ *எனில்* $_{23}C_n$*-ஐக் காண்க.*
3. $_8C_r - {_7C_3} = {_7C_2}$ *எனில்* r*-ன் மதிப்பு காண்க.*
4. $_{16}C_4 = {_{16}C_{r+2}}$ *எனில்* $_rC_2$*-ஐக் காண்க.*
5. (i) $2 \cdot {_nC_3} = \frac{20}{3}\,{_nC_2}$ (ii) $_nC_{(n-4)} = 70$ *ஆகியவற்றின்* n*-ன் மதிப்பினைக் காண்க.*
6. $_{(n+2)}C_8 : {_{(n-2)}P_4} = 57 : 16$ *எனில்* n*-ன் மதிப்பு காண்க.*
7. $_{28}C_{2r} : {_{24}C_{(2r-4)}} = 225 : 11$ *எனில்* r*-ஐ காண்க..*

சேர்வுகள் சம்பந்தமான செய்முறை கணக்குகள :

எ.கா. 3.40: 15 *கிரிக்கெட் வீரர்கள் கொண்ட ஒரு குழுமத்திலிருந்த* 11 *பேர் கொண்ட ஒரு குழு தேர்வு செய்ய, எத்தனை வழிகளைக் கையாளலாம்?*

தீர்வு : 15 *பேர் கொண்ட குலத்திலிருந்து,* 11 *பேர் கொண்ட குழுவினை* $_{15}C_{11}$ *வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.*

$$_{15}C_{11} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 1365 \text{ வழிகள்}$$

எ.கா. 3.41: 25 *மாணவர்கள் மற்றும்* 10 *மாணவியர்கள் கொண்ட வகுப்பில் இருந்து* 5 *மாணவர்கள்,* 3 *மாணவிகள் அடங்கிய* 8 *பேர் குழு எத்தனை வழிகளில் உருவாக்கலாம்?*

தீர்வு : 25 மாணவர்களிலிருந்து 5 மாணவர்களை $_{25}C_5$ வழிகளிலும்

10 மாணவியர்களிலிருந்து 3 மாணவிகளை $_{10}C_3$ வழிகளிலும் தேர்வு செய்யலாம்.

எனவே 8 பேர் அடங்கிய குழுவினை $_{25}C_5 \times {}_{10}C_3$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம். அதாவது 6375600 வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.

எ.கா. 3.42: ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் உச்சிப் புள்ளிகளை இணைப்பதால் ஏற்படும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

தீர்வு : ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்திற்கு 6 உச்சிப் புள்ளிகள் உள்ளன. 3 உச்சிப் புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு முக்கோணத்தினை உருவாக்கலாம். இதனை $_6C_3$ வழிகளில் செய்ய முடியும்.

எனவே முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை $= {}_6C_3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$

எ.கா. 3.43: ஒரு வகுப்பில் 12 மாணவர்களும் 10 மாணவியரும் உள்ளனர். இவர்களிலிருந்து குறைந்தது 4 மாணவர்களும், குறைந்தது 4 மாணவியரும் அடங்கிய 10 பேர் அடங்கிய ஒரு குழுவினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அக்குழுவில் ஏற்கனவே போட்டியில் வெற்றி பெற்ற 2 மாணவிகளும் கண்டிப்பாக இருக்க வேண்டும் எனில் எத்தனை வழிகளில் இந்தத் தேர்வினை செய்ய முடியும்?

தீர்வு : 10 பேர் அடங்கிய குழுவில் கண்டிப்பாக ஏற்கனவே போட்டியில் வெற்றி பெற்ற இரண்டு மாணவிகள் இருக்க வேண்டுமென்பதால் மீதி 8 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இதனை நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு கீழ்க்கண்ட முறையில் தேர்வு செய்யலாம். குறிப்பாகத் தற்போது 8 மாணவிகள் மட்டுமே உள்ளனர் என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

(i) 6 மாணவர்கள், 2 மாணவிகள்

(ii) 5 மாணவர்கள், 3 மாணவிகள்

(iii) 4 மாணவர்கள், 4 மாணவிகள்

எனவே தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகள் $= ({}_{12}C_6 \times {}_8C_2) + ({}_{12}C_5 \times {}_8C_3) + ({}_{12}C_4 \times {}_8C_4)$

$= (924 \times 28) + (792 \times 56) + (495 \times 70)$

$= 25872 + 44352 + 34650$

$= 104874$

எ.கா. 3.44: ஒரு பல கோணத்திற்கு எத்தனை மூலை விட்டங்கள் இருக்கும்?

தீர்வு : பல கோணத்திற்கு n பக்கங்கள் உள்ளன எனக் கொள்க. இப்பல கோணத்திற்கு n உச்சிப் புள்ளிகள் இருக்கும். இந்த n புள்ளிகளை ஒன்றையொன்றை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளின் எண்ணிக்கை n பொருட்களிலிருந்து 2 பொருட்கள் எடுக்கும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

இந்தக் கோட்டுத் துண்டுகளில், n துண்டுகள் பல கோணத்தின் பக்கங்களாகவும் மீதி மூலைவிட்டங்களாகவும் இருக்கும்.

எனவே மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

எ.கா. 3.45 10 புத்தகங்கள் அடங்கிய தொகுப்பிலிருந்து 4 புத்தகங்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

(i) எந்தவித கட்டுப்பாடின்றி

(ii) ஏற்கனவே இரண்டு புத்தகங்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டு விட்டதெனில் ;

(iii) இரண்டு குறிப்பிட்ட புத்தகங்களைத் தேர்வு செய்தல் கூடாது.

***தீர்வு* :**

(i) 10 புத்தகங்களிலிருந்து நான்கினைத் தேர்வு செய்யும் வழிகள்

$$= {}_{10}C_4 = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

(ii) ஏற்கனவே இரண்டு தேர்வு செய்யப்பட்டு விட்டதால், மீதி தேர்வு செய்யப்பட வேண்டிய 2 புத்தகங்களை மீதி 8 புத்தகங்களிலிருந்து தேர்வு செய்யப்பட வேண்டும்.

எனவே அதன் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}_8C_2 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$

(iii) குறிப்பிட்ட இரண்டு புத்தகங்களை தேர்வு செய்யப்படக்கூடாது என்பதால் மீதியுள்ள 8 புத்தகங்களிலிருந்து நான்கினைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

இந்த தேர்வுகளின் எண்ணிக்கை $= {}_8C_4 = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$

எ.கா. 3.46: 10 மட்டையாளர்கள், 8 பந்து வீச்சாளர்கள், 5 தேர்ந்தவர்கள் (all-rounders) மற்றும் 2 விக்கெட் காப்பாளர்கள் கொண்ட 25 பேர் கிரிக்கெட் குழு உள்ளது. இக்குழுவிலிருந்து 5 மட்டையாளர்கள், 3 தேர்ந்தவர்கள், 2 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 விக்கெட் காப்பாளரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்க இயலும்?

***தீர்வு* :** இந்த தேர்வானது 4 நிலைகளை உடையது :

(i) 10 மட்டையாளர்களில் 5 பேரை ${}_{10}C_5$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.

(ii) 5 தேர்ந்தவர்களில் 3 பேரை ${}_5C_3$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.

(iii) 8 பந்து வீச்சாளர்களிலிருந்து 2 பேரை $_8C_2$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.

(iv) 2 விக்கெட் பாதுகாப்பாளர்களின் ஒருவரை $_2C_1$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.

மொத்தத்தில் தேவையானவர்களை தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை = $_{10}C_5 \times {_5C_3} \times {_8C_2} \times {_2C_1}$

$= 252 \times 10 \times 28 \times 2$

$= 141120$

எ.கா. 3.47: ஒரு தளத்தில் 18 புள்ளிகள் உள்ளன. இவற்றில் 5 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. வேறு எந்த 3 புள்ளிகளின் தொகுப்பும் எந்தவொரு நேர்க்கோட்டிலும் அமையவில்லையெனில்

(i) புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் நேர்க்கோடுகள்

(ii) புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

தீர்வு :

(i) 18 புள்ளிகளில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் நேர்க்கோடுகளின் எண்ணிக்கை = $_{18}C_2 = 153$

நேர்க்கோட்டிலுள்ள 5 புள்ளிகளில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் நேர்க்கோடுகளின் எண்ணிக்கை = $_5C_2 = 10$

ஆனால் இந்த 5 புள்ளிகளும் சேர்ந்து 1 நேர்க்கோட்டினைக் கொடுக்கிறது. எனவே நேர்க்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

$= 153 - 10 + 1 = 144$

(ii) 18 புள்ளிகளில் ஏதேனும் 3 புள்ளிகளை இணைக்கும் போது கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை = $_{18}C_3 = 816$

5 புள்ளிகளில் ஏதேனும் 3 புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை = $_5C_3 = 10$

ஆனால் நேர்க்கோட்டிலுள்ள 5 புள்ளிகளால் எந்தவித முக்கோணமும் உருவாகாது.

எனவே முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை $= 816 - 10 = 806$

பயிற்சி 3.5

1. ஒரு தேநீர் விருந்தில் 12 பேர் கலந்து கொண்டனர். இவர்களில் ஒவ்வொரு இருவரும் கைகுலுக்கினால், அந்த விருந்தில் உண்டான குலுக்கல்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

2. 6 ஆண்கள் மற்றும் 5 பெண்களிலிருந்து 3 ஆண்கள் மற்றும் 2 பெண்களைக் கொண்ட குழுவினை எத்தனை வழிகளில் உருவாக்கலாம்?

3. ஒரு தளத்தில் உள்ள 12 புள்ளிகளில், 5 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. இப்புள்ளிகளை இணைத்து எத்தனை முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்?

4. ஒரு கூடையில் 5 சிவப்பு நிற பந்துகளும், இன்னொரு கூடையில் 6 வெள்ளைநிற பந்துகளும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து குறைந்தபட்சம் ஒவ்வொரு நிறத்திற்கும் 2 பந்துகள் இருக்கும் வகையில் 6 பந்துகள் எத்தனை வழிகளில் எடுக்க இயலும்?

5. கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு 15 பேர் கொண்ட கிரிக்கெட் குழுவிலிருந்து 11 பேரை எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்ய முடியும்?
   (i) தேர்வில் எந்தக் கட்டுப்பாடும் இல்லை.
   (ii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் கண்டிப்பாக இடம்பெறுதல் வேண்டும்.
   (iii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் கண்டிப்பாக இடம்பெறுதல் கூடாது.

6. ஒரு வினாத்தாளில் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் 6 வினாக்கள் கொண்ட இரு பகுதிகளாக 12 வினாக்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பகுதியிலும் 5க்கு மேலான வினாக்களைத் தேர்ந்தெடுக்காமல் மொத்தம் 7 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டுமானால் எத்தனை விதங்களில் வினாக்களைத் தேர்வு செய்து விடையளிக்கலாம்?

7. ஒரு தளத்தில் 10 புள்ளிகள் உள்ளன. இவற்றில் 4 புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. பிற எந்தவொரு 3 புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையவில்லை. இப்போது
   (i) புள்ளிகளை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் நேர்க்கோட்டுகளின் எண்ணிக்கை என்ன?
   (ii) புள்ளிகளை இணைத்து கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

8. ஒரே மாதிரியான 21 தமிழ்ப் புத்தகங்களும், ஒரே மாதிரியான 19 ஆங்கிலப் புத்தகங்களும் உள்ளன. இரண்டு ஆங்கிலப் புத்தகங்கள் தொடர்ந்து இடம்பெறாமல் மொத்தப் புத்தகங்களையும் ஒன்றன்மீது ஒன்றாக அடுக்க வேண்டுமானால், எத்தனை வழிகளில் அடுக்கலாம்?

9. ஒரு சுற்றுலாவிற்கு 25 மாணவர்களில் 10 பேரை தேர்வு செய்ய வேண்டும். இதில் 3 மாணவர்கள், மூன்று பேரும் முழுமையாகக் கலந்து கொள்வது என்றும் அல்லது 3 பேரும் முழுமையாகக் கலந்து கொள்வதில்லை என்றும் தீர்மானித்துள்ளனர் எனில் சுற்றுலாவுக்குச் செல்லவிருக்கும் 10 பேரை எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

3.4 *கணிதத் தொகுத்தறிதல்* (Mathematical Induction) :

அறிமுகம் :

ஆங்கில கணிதவியலாளரான அகஸ்டஸ் டி-மார்கன் (1809 – 1871) *என்பவர் நாம் பயன்படுத்தும் கணிதத் தொகுத்தறிதலின் மூலத்தை முதன் முதலில் தன்னுடைய கண்டுபிடிப்புகளில் பயன்படுத்தினார். ஆனால் தொகுத்தறிதலுக்கு மூலக் காரணமாக இருந்தவர் இத்தாலிய கணித வல்லுநர் பிரான்சிஸ்கோ மாரோலிகஸ்* (1494 – 1575) *என்பவராவார். இந்தியக் கணிதவியலாளர் பாஸ்கரா* (1153 A.D)*வின் அரிய கண்டுபிடிப்புகளில் கணிதத் தொகுத்தறிதலின் தாக்கத்தைக் காண இயலும்.*

தொகுத்தறிதல் என்பது பல தனித்தனி உண்மைக் கூற்றுகளிலிருந்து ஒரு பொது விதியினை உருவாக்கும் முறையாகும்.

உதாரணமாக, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 7 + 3$

மேற்குறிப்பிட்ட தனித்தனி உண்மைக் கூற்றுகளிலிருந்து "எந்தவொரு இரட்டைப்படை எண்ணையும் (2-*ஐத் தவிர) இரு பகா எண்களின் கூடுதலாக எழுதலாம்" என ஒருவர் கணிக்கலாம்.*

நூற்றுக்கு மேலான தனித்தனியாக உறுதி செய்யப்பட்ட உண்மைக் கூற்றுகளிலிருந்து ஒரு பொது கூற்றினை, 'இது சரியான கூற்று' என்று கூறிவிட இயலாது. இத்தனித்தனி உண்மைக் கூற்றுகளிலிருந்து நேரடியாக உருவாக்கப்படும் பொதுக் கூற்றினை ஒரு ஊகம் எனக் கூறலாம். ஊகமானது நிரூபிக்கப்படாத வரையில் ஊகமாகவே இருக்குமே தவிர, விதியாகாது.

ஒரு ஊகம், இயல் எண்களின் சார்பாக கூறப்பட்டால் அதன் பொது விதியாக மாற்றி அமைக்க உதவும் முறையினைக் கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாடு என்கிறோம்.

எனவே கணித தொகுத்தறிதல் என்பது, ஒரு கூற்றினைச் சில குறிப்பிட்ட இயல் எண்களுக்கு நேரடியாக சரிபார்த்துவிட்டு எல்லா இயல் எண்களுக்கும் உண்மை என நிரூபிக்கும் முறையாகும்.

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் கொள்கை :

ஒவ்வொரு இயல் எண் n*க்கும் தகுந்த ஒரு கூற்றினை* $P(n)$ *என்க.*

(i) $P(1)$ *என்பது உண்மையாகவும்*

(ii) $P(k)$ *உண்மையாக இருக்கும் போது* $P(k+1)$ *உண்மையாகவும் இருந்தால்* $P(n)$ *என்பது எல்லா இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாக இருக்கும்.*

இக் கொள்கையை நாம் நிரூபணமின்றி ஏற்றுக்கொள்வோம்.

கணிதத் தொகுத்தறியும் முறை :

படிநிலை (1) : $n = 1$ என்பதற்குக் கூற்று உண்மை என நிரூபிக்க

படிநிலை (2) : $n = k$ என்பதற்குக் கூற்று உண்மை என ஏற்றுக் கொள்க.

படிநிலை (3) : $n = k + 1$ என்பதற்குக் கூற்று உண்மை என நிரூபிக்க.

படிநிலை (4) : கொடுக்கப்பட்ட கூற்று எல்லா இயல் எண்களுக்கும் உண்மை என்ற முடிவுக்கு வரவும்.

எ.கா. 3.48: கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n^2 + n$ என்பது ஒரு இரட்டைப்படை எண் என நிரூபிக்க

தீர்வு : P(n) என்பது "$n^2 + n$ ஒரு இரட்டைப்படை எண்" என்ற கூற்று எனக் கொள்க.

***படி நிலை* (1):** $n = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$n^2 + n = 1^2 + 1$$

$= 2$, ஒரு இரட்டைப் படை எண்

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மை

***படிநிலை* (2):**

$n = k$ என்பதற்குக் கூற்று உண்மை எனக் கொள்க.

(அ.து) P(k) என்பது உண்மை.

(அ.து.) "$k^2 + k$" ஒரு இரட்டைப்படை எண் எனக் கொள்க. … (1)

***படிநிலை* (3):** P(k + 1) என்பது உண்மை என நிரூபிக்க

i.e. $(k + 1)^2 + (k + 1)$ ஒர இரட்டைப்படை எண் என நிரூபிக்க.

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1$$

$$= k^2 + 2k + k + 2$$

$$= (k^2 + k) + 2(k + 1)$$

= ஒரு இரட்டைப் படை எண் + $2(k + 1)$, (1)லிருந்து

= இரண்டு இரட்டைப் படை எண்களின் கூடுதல்

= இரட்டைப்படை எண்

$\therefore$ P(k + 1) என்பது உண்மை.

எனவே P(k) என்பது உண்மையானால், P(k + 1) என்பதுவும் உண்மை

***படிநிலை* (4):** கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி, P(n) என்பது $n \in \mathbb{N}$க்கு உண்மையாகும்.

அதாவது $n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$ என்பது ஒரு இரட்டைப் படை எண் ஆகும்.

எ.கா. 3.49: *கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம்* $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in N$ *என நிரூபி.*

தீர்வு : P(n) *என்பது* "$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$" *என்ற கூற்று என்க.*

$n = 1$ *எனப் பிரதியிடுக.*

P(1) *என்ற கூற்று* :

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(2)}{2}$$

$$1 = 1$$

எனவே P(1) *என்பது உண்மை.*

இப்போது கொடுக்கப்பட்ட கூற்று $n = k$*க்கு உண்மை எனக் கொள்க.*

(i.e.)$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ … (1) *என்பது உண்மை எனக் கொள்க.*

P(k + 1) *என்பது உண்மை என நிரூபிக்க*

i.e. $$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

என்பது உண்மை என நிரூபிக்க

(1)*லிருந்து* $$[1 + 2 + 3 + \ldots + k] + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

எனவே P(k + 1) *என்பது உண்மை.*

எனவே P(k) *உண்மையானால்* P(k + 1)-*ம் உண்மையாகும்.*

கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி P(n), $n \in N$ *என்பதும் உண்மை*

$$\therefore\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad n \in N$$

எ.கா. **3.50:** *கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் நிரூபிக்க*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad n \in N$$

தீர்வு :

P(n) என்பது "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$" என்ற கூற்று என்க

$n = 1$ எனப் பிரதியிட

P(1) என்ற கூற்று : $1^2 = \frac{1(1+1)[2(1)+1]}{6}$

$$1 = \frac{1(2)(3)}{6}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மை.

$n = k$ என்பதற்கு P(k) என்ற கூற்று உண்மை எனக் கொள்க.

அதாவது, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ … (1)

P(k + 1) என்பது உண்மை என நிரூபிக்க

(i.e.) $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ என நிரூபிக்க

$$[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2] + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$\therefore$ P(k + 1) என்பது உண்மை

எனவே P(k) என்பது உண்மையானல், P(k + 1) என்பதுவும் உண்மை

கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி P(n), $n \in N$ என்பது உண்மை

(i.e.) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in N$

எ.கா. 3.51: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \in N$ என்பதனைக் கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் காட்டுக.

தீர்வு :

P(n) என்பது "$1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$" என்ற கூற்று எனக் கொள்க.

$n = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

$$1(2) = \frac{1(2)(3)}{3}$$

$$2 = \frac{2(3)}{3}$$

$$2 = 2$$

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மை

$n = k$ என்பதற்கு P(k) என்ற கூற்று உண்மை எனக் கொள்க.

அதாவது $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + k(k+1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$ என்பது உண்மை

P($k + 1$) என்பது உண்மை என நிரூபிக்க

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots, + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots, &+ k(k+1) + (k+1)(k+2) \\ &= [1.2 + 2.3 + \ldots + k(k+1)] + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

$\therefore$ P($k + 1$) என்பது உண்மை

எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி என்பது உண்மை.

P(n), $n \in$ N என்பது உண்மை

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

எ.கா. 3.52: எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $2^{3n} - 1$, ஏழால் வகுபடும் என்பதனைக் கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் நிரூபிக்க.

தீர்வு :

P(n) என்பது "$2^{3n} - 1$ ஏழால் வகுபடும்" என்ற கூற்று எனக் கொள்க.

$n = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$2^{3(1)} - 1 = 2^3 - 1$$
$$= 8 - 1$$
$$= 7 \text{ இது ஏழால் வகுபடும்}$$

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மை

$n = k$ என்பதற்கு P(n) என்ற கூற்று உண்மை எனக் கொள்க.

அதாவது "$2^{3k} - 1$ ஏழால் வகுபடும்" எனக் கொள்க.

P(k + 1) என்பது உண்மை என நிரூபிக்க

அதாவது "$2^{3(k+1)} - 1$ ஏழால் வகுபடும்" என நிரூபிக்க

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k+3} - 1$$
$$= 2^{3k} . 2^3 - 1 = 2^{3k} . 8 - 1$$
$$= 2^{3k} . 8 - 1 + 8 - 8 \quad \text{(8 ஐ கூட்டி கழிக்கவும்)}$$
$$= (2^{3k} - 1)\, 8 + 8 - 1$$
$$= (2^{3k} - 1)\, 8 + 7 = 7\text{ன் மடங்கு} + 7$$
$$= 7\text{ன் மடங்கு}$$

$\therefore 2^{3(k+1)} - 1$ ஏழால் வகுபடும்

$\therefore$ P(k + 1) என்பது உண்மை

எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி P(n), $n \in$ N என்பது உண்மை.

எனவே எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $2^{3n} - 1$ ஏழால் வகுபடும்.

எ.கா. 3.53: எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $a^n - b^n$ ஆனது (a–b)ஆல் வகுபடும் எனக் கணித தொகுத்தறிதல் முறையில் நிரூபிக்க.

தீர்வு :

P(n) என்பது "$a^n - b^n$ ஆனது $a - b$"ஆல் வகுபடும்" என்ற கூற்று எனக் கொள்க.

$n = 1$ னப் பிரதியிட,

$a^1 - b^1 = a - b$. இது $a - b$ஆல் வகுபடும்.

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மை.

$n = k$ என்பதற்கு P(n) என்ற கூற்று உண்மை எனக் கொள்க.

அதாவது $a^k - b^k$ ஆனது $(a - b)$ ஆல் வகுபடும் எனக் கொள்க.

$$\Rightarrow \quad \frac{a^k - b^k}{a - b} = c \text{ (என்க) இங்கு } c \in \mathrm{N}$$

$$\Rightarrow \quad a^k - b^k = c(a - b)$$

$$\Rightarrow \quad a^k = b^k + c(a - b) \qquad \ldots (1)$$

P(k + 1) என்பது உண்மை என நிரூபிக்க

(i.e.) $a^{k+1} - b^{k+1}$ ஆனது $a - b$ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k . a - b^k \; b$$

$$= \left[b^k + c(a - b)\right] \; a - b^k \; b$$

$$= b^k a + ac(a - b) - b^k b$$

$$= b^k(a - b) + ac\,(a - b)$$

$$= (a - b)\,(b^k + ac). \quad \text{இது } (a - b) \text{ ஆல் வகுபடும்}$$

$\therefore$ P(k + 1) என்பது உண்மை

அதாவது P(k) என்பது உண்மையானால் P(k + 1) என்பதுவும் உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி P(n), $n \in$ N என்பதுவும் உண்மையாகும்.

$\therefore$ $a^n - b^n$ ஆனது $a - b$ ஆல் வகுபடும். இங்கு $n \in$ N

பயிற்சி 3.6

கணிதத் தொகுத்தறிதல் கோட்பாட்டின்படி கீழ்க்காணும் முடிவுகளை நிரூபிக்க

(1) ஒவ்வொரு இயல் எண் n-க்கும் $(2n + 1)\,(2n - 1)$ ஒரு ஒற்றைப்படை எண்.

(2) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n\,(n + 1)$

(3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(4) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

(5) $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n + 1)$

(6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2\,(n + 1)^2}{4}$

(7) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

(8) $a, a + d, a + 2d, \ldots$ என்ற கூட்டல் தொடரில்
nவது உறுப்பு $a + (n - 1)d$

(9) எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $5^{2n} - 1$ ஆனது 24ஆல் வகுபடும்.

(10) எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $10^{2n-1} + 1$ ஆனது 11ஆல் வகுபடும்

(11) எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $n(n + 1)(n + 2)$ ஆனது 6 ஆல் வகுபடும்

(12) எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

(13) எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $7^{2n} + 16n - 1$ ஆனது 64ஆல் வகுபடும்

(14) எல்லா இயல் எண் n-க்கும் $2^n > n$

3.5 ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem) :

அறிமுகம் :

'+' (அல்லது) '–' என்ற செயலிகளால் இணைக்கப்பட்ட இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையானது ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை (BINOMIAL) என அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x + 2y$, $x - y$, $x^3 + 4y$, $a + b$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைகளாகும்.

மிகை முழு எண்ணை அடுக்காகக் கொண்ட ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவாக்கம் :

ஒரு ஈருறுப்புக் கோவையை, அதனுடன் பெருக்கும் முறையை நாம் முன்பே கற்றிருக்கிறோம். ஒரு ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கத்தையும், கனத்தையும் சாதாரண பெருக்கல் முறையில் காண்பது கடினமானதல்ல. ஆனால், அதிகமான படி கொண்ட ஈருறுப்புக் கோவைகளான $(x + a)^{10}$, $(x + a)^{17}$, $(x + a)^{25}$ போன்றவைகளை விரிவாக்கும் செயலானது மிகவும் கடினமானது. எனவே, அதிக படி கொண்ட ஈருறுப்புக் கோவைகளின் விரிவுகளைக் காண ஒரு பொதுவான சூத்திரத்தை நாம் காண முயல்கிறோம்.

$(x + a)^1 = x + a = {}_1C_0\, x^1 a^0 + {}_1C_1\, x^0 a^1$ என நாம் அறிவோம்.

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = {}_2C_0 x^2 a^0 + {}_2C_1 x^1 a^1 + {}_2C_2 x^0 a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3 = {}_3C_0 x^3 a^0 + {}_3C_1 x^2 a^1 + {}_3C_2 x^1 a^2 + {}_3C_3 x^0 a^3$

$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 a^2 + 4xa^3 + a^4 = {}_4C_0 x^4 a^0 + {}_4C_1 x^3 a^1 + {}_4C_2 x^2 a^2 + {}_4C_3 x^1 a^3 + {}_4C_4 x^0 a^4$

$(x + a)^n$இன் விரிவு n = 1, 2, 3, 4 எனும்போது ஒரு ஒழுங்கான முறையில் சேர்வு முறை குணகங்களாகக் காட்டப்படுகிறது. மேற்கண்ட கோவைகள் $(x + a)^n$-ஐ

$$(x + a)^n = nC_0\, x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + \ldots + nC_{n-1}\, x^1\, a^{n-1} + nC_n\, x^0 a^n$$

என்ற வடிவில் காட்டலாம் என்ற ஊகத்தைத் தருகிறது.

உண்மையில், இந்த ஊகத்தை உண்மை என நிரூபிக்கலாம். இதனைக் கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கை மூலம் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 3.6: (இயல் எண் அடுக்குக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றம்)

n ஒரு இயல் எண் எனில்

$$(x + a)^n = nC_0\, x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + \ldots + nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots + nC_{n-1}\, x^1\, a^{n-1} + nC_n\, x^0 a^n$$

நிரூபணம் : இத்தேற்றத்தை நாம் கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கை மூலம் நிரூபிக்கலாம்.

P(n) என்பது

$$(x + a)^n = nC_0\, x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + \ldots + nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots + nC_{n-1}\, x^1\, a^{n-1} + nC_n\, x^0 a^n$$ என்ற கூற்றைக் குறிக்கிறது என்க.

படிநிலை (1) : $n = 1$ என்க

P(1) என்ற கூற்று : $(x + a)^1 = {}_1C_0 x^1\, a^0 + {}_1C_1\, x^{1-1}\, a^1$

$$x + a = x + a$$

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மையாகும்

படிநிலை (2): $n = k$ என்பதற்கு கூற்று உண்மை என்க.

(அ.து.) P(k) உண்மை எனக் கருதுக.

$$(x + a)^k = kC_0 x^k\, a^0 + kC_1 x^{k-1} a^1 + kC_2\, x^{k-2} a^2 + \ldots + kC_r\, x^{k-r} a^r + \ldots + {}_kC_k\, x^0 a^k \quad \ldots (1)$$

படிநிலை (3): இப்பொழுது, P($k + 1$) உண்மை என நிரூபிக்க,

$$(x + a)^{k+1} = {}_{(k+1)}C_0 x^{k+1} + {}_{(k+1)}C_1 x^{(k+1)-1} a^1 + {}_{(k+1)}C_2 x^{(k+1)-2}\, a^2 + \ldots + {}_{(k+1)}C_r x^{(k+1)-r}\, a^r + \ldots + {}_{(k+1)}C_{(k+1)}\, a^{k+1}$$ என நிரூபிக்க

$$(x + a)^{k+1} = (x + a)^k\, (x + a)$$

$$= [kC_0 x^k + kC_1 x^{k-1} a^1 + kC_2\, x^{k-2} a^2 + \ldots + kC_{(r-1)}\, x^{k-(r-1)}\, a^{(r-1)} + kC_r\, x^{k-r} a^r + \ldots + kC_k a^k]\, (x + a)$$

$$= [kC_0x^{k+1} + kC_1x^k a^1 + kC_2x^{k-1}a^2 + \ldots + kC_{r-1}x^{k-r+2}a^{r-1}$$
$$+ kC_rx^{k-r+1}a^r + \ldots + kC_kxa^k]$$
$$+ [kC_0x^ka + kC_1x^{k-1}a^2 + kC_2x^{k-2}a^3 + \ldots + kC_{r-1}x^{k-r+1}a^r$$
$$+ kC_rx^{k-r}a^{r+1} + \ldots + kC_ka^{k+1}]$$

$$(x + a)^{k+1} = kC_0x^{k+1} + (kC_1 + kC_0)x^k.a + (kC_2 + kC_1)x^{k-1}a^2$$
$$+ \ldots + (kC_r + kC_{r-1})x^{k-r+1}a^r + \ldots + kC_k\ a^{k+1} \quad \ldots (2)$$

$kC_r + kC_{r-1} = {}_{(k+1)}C_r$ *என நாம் அறிவோம்*

$r = 1, 2, 3, \ldots$ *எனப் பிரதியிட*

$$kC_1 + kC_0 = {}_{(k+1)}C_1$$
$$kC_2 + kC_1 = {}_{(k+1)}C_2$$
$$kC_r + kC_{r-1} = {}_{(k+1)}C_r \qquad 1 \le r \le k$$
$$kC_0 = 1 = {}_{(k+1)}C_0$$
$$kC_k = 1 = {}_{(k+1)}C_{(k+1)}$$

(2)-ல் *பிரதியிட,*

$$(x + a)^{k+1} = {}_{(k+1)}C_0\,x^{k+1} + {}_{(k+1)}C_1\,x^ka + {}_{(k+1)}C_2\,x^{k-1}a^2$$
$$+ \ldots + {}_{(k+1)}C_r\,x^{k+1-r}a^r + \ldots + {}_{(k+1)}C_{(k+1)}\,a^{k+1}$$

$\therefore$ P(k + 1) *என்பது உண்மையாகும்.*

இவ்வாறாக, P(k) *உண்மை எனில்* P(k + 1) *உண்மையாகும்.*

$\therefore$ *கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி* P(n) *ஆனது அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும்.*

$$(x + a)^n = nC_0\,x^na^0 + nC_1x^{n-1}a^1 + \ldots + nCr\,x^{n-r}a^r + \ldots$$
$$+ nC_{n-1}\,x^1a^{n-1} + nCn\,x^0a^n \qquad n\in N$$

***உணர்ந்து கொண்ட உண்மைகள்* (Some observations) :**

1. $(x + a)^n = nC_0\,x^na^0 + nC_1x^{n-1}a^1 + \ldots + nCr\,x^{n-r}a^r + \ldots$

$+ nC_{n-1}\,x^1\,a^{n-1} + nCn\ x^0a^n$ *என்ற விரிவாக்கத்தில்* $nC_r\ x^{n-r}\ a^r$ *ஆனது பொது உறுப்பாகும். இது* (r + 1)*வது உறுப்பானதால் இதனை* T_{r+1} *எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.*

(அ.து.) $\mathbf{T_{r+1} = nC_r\,x^{n-r}\,a^r}$.

2. $(n+1)$வது உறுப்பு $T_{n+1} = nC_n\, x^{n-n}\, a^n = nC_n\, a^n$ஆனது இறுதி உறுப்பாகும்.

எனவே $(x+a)^n$-ன் விரிவாக்கத்தில் $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

3. ஒவ்வொரு உறுப்பிலும், x-ன் படி குறைந்து, "a"யின் படி கூடுகிறது. படிக்களின் கூடுதல் nக்குச் சமம்.

$(x+a)^n = \sum\limits_{r=0}^{n} nC_r\, x^{n-r} a^r$ என நாம் எழுதலாம்.

4. $nC_0,\ nC_1,\ nC_2,\ \ldots,\ nC_r,\ \ldots\ ,\ nC_n$ என்பன ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும். இவைகள் $C_0,\ C_1\ ,\ C_2,\ \ldots\ ,\ C_n$ என்றும் எழுதப்படும்.
5. $nC_r = nC_{n-r}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து, முதலில் இருந்தும், இறுதியில் இருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் சமம்.
6. $(x+a)^n$இன் வரிவாக்கத்திலுள்ள பல்வேறு உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஒரு அமைப்பை (pattern) ஏற்படுத்துகின்றன.

ஈருறுப்புகள்	***ஈருறுப்புக் கெழுக்கள்***
$(x+a)^o$	1
$(x+a)^1$	1 1
$(x+a)^2$	1 2 1
$(x+a)^3$	1 3 3 1
$(x+a)^4$	1 4 6 4 1
$(x+a)^5$	1 5 10 10 5 1

ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் இந்த வரிசையமைப்பானது பிரான்சு கணிதவியலாளர் பிளாசி பாஸ்கல் (1623 – 1662) என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதால் பாஸ்கலின் முக்கோணம் (Pascal's triangle) என்று அழைக்கப்படுகிறது. எந்தவொரு நிரையிலுள்ள எண்களையும் பின்வரும் விதியினால் பெறலாம். ஒவ்வொன்றிலும், முதல் மற்றும் இறுதி எண்கள் 1. மற்ற எண்களை, முந்தைய நிரையிலுள்ள இடது மற்றும் வலது எண்களை கூட்டப் பெறலாம்.

1, $1+4=5$, $4+6=10$, $6+4=10$, $4+1=5$, 1

சில தேர்ந்த விரிவாக்கங்கள் :

$$(x+a)^n = nC_0\, x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + \ldots + nCr\, x^{n-r} a^r + \ldots$$
$$+ nC_{n-1}\, x^1\, a^{n-1} + nCn\, x^0 a^n \ \ldots (1)$$ என்ற விரிவில்

1. நாம் aக்கு பதிலாக $-a$ எனப் பிரதியிட,

$$\therefore (x-a)^n = nC_0x^n - nC_1 x^{n-1}a^1 + nC_2x^{n-2} a^2 - \ldots$$

$$+ (-1)^r nC_r x^{n-r}a^r + \ldots + (-1)^n nC_n a^n$$ எனப் பெறுகிறோம்.

உறுப்புகளின் குறிகள் அடுத்தடுத்து மிகை, குறையாக இருப்பதை நாம் கவனிக்கிறோம்.

2. (1)ல், a-க்குப் பதிலாக 1 எனப் பிரதியிட,

$$(1+x)^n = 1 + nC_1x + nC_2x^2 + \ldots + nC_rx^r + \ldots + nC_nx^n \quad \ldots (2)$$

3. (2)ல் x-க்குப் பதிலாக $-x$ எனப் பிரதியிட,

$$(1-x)^n = 1 - nC_1 x + nC_2x^2 - \ldots + (-1)^r nC_rx^r + \ldots + (-1)^n nC_nx^n$$

மைய உறுப்பு : $(x + a)^n$-ன் விரிவாக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை படிக்குறி n-ஐச் சார்ந்துள்ளது.

நிலை (i) : n இரட்டைப்படை எண்

விரிவாக்கத்தில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $(n + 1)$ என்று ஒற்றைப்படையாக அமையும். எனவே, ஒரே ஒரு மைய உறுப்புதான் உண்டு. இது $T_{\frac{n}{2}+1}$ என்பதாகும்.

நிலை (ii) : n-ஒற்றைப்படை எண்

விரிவாக்கத்தில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $(n + 1)$ என்று இரட்டைப் படையாக அமையும். எனவே, இரண்டு மைய உறுப்புகள் உண்டு. இவை $T_{\frac{n+1}{2}}$ மற்றும் $T_{\frac{n+3}{2}}$ என்பதாகும்.

குறிப்பிட்ட உறுப்புகளை காணுதல் :

சில சமயங்களில் $(x + a)^n$ன் ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்தில் உறுப்புகள் சில நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யும். ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு தேவைப்படுகிறது எனில், இதனை $(x + a)^n$ஐ விரிவுபடுத்தி பின்னர் தேவையான உறுப்பின் இடமறிவதன் மூலம் செயல்படுத்த இயலும். பொதுவாகப், படிக்குறி n மிகப்பெரியதாக இருந்தால், இது கடினமானதாகும். இதுபோன்ற நிலைகளில், நாம் பொது உறுப்பு T_{r+1}ஐ முதலில் கண்டறிந்து பின்னர் T_{r+1} ஆனது தேவையான உறுப்பாகக் கருதி r-இன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

x-ஐச் சாராத உறுப்பினைக் காண x-ன் அடுக்கினைப் பூச்சியத்துடன் சமப்படுத்தி x-ஐச் சாராத r-ன் மதிப்பினால் பெறலாம். T_{r+1}இல் $\boldsymbol{r}$-ன் இந்த மதிப்பை இட்டு x-ஐச் சாராத உறுப்பினைப் பெறலாம்.

எ.கா. 3.54: (i) $(2x + 3y)^5$ (ii) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^4$ -ன் விரிவாக்கங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $$(2x + 3y)^5 = {}_5C_0\,(2x)^5\,(3y)^o + {}_5C_1\,(2x)^4\,(3y)^1 + {}_5C_2\,(2x)^3\,(3y)^2 + {}_5C_3\,(2x)^2\,(3y)^3 + {}_5C_4\,(2x)^1\,(3y)^4 + {}_5C_5\,(2x)^0\,(3y)^5$$

$$= 1(32)x^5\,(1) + 5(16x^4)\,(3y) + 10(8x^3)\,(9y^2) + 10(4x^2)\,(27y^3) + 5(2x)\,(81y^4) + (1)\,(1)\,(243y^5)$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

(ii) $$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^4 = {}_4C_0\,(2x^2)^4\left(-\frac{3}{x}\right)^0 + {}_4C_1\,(2x^2)^3\left(-\frac{3}{x}\right)^1 + {}_4C_2\,(2x^2)^2\left(-\frac{3}{x}\right)^2 + {}_4C_3\,(2x^2)^1\left(-\frac{3}{x}\right)^3 + {}_4C_4\,(2x^2)^0\left(-\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= (1)\,16x^8(1) + 4(8x^6)\left(-\frac{3}{x}\right) + 6(4x^4)\left(\frac{9}{x^2}\right) + 4(2x^2)\left(-\frac{27}{x^3}\right) + (1)\,(1)\left(\frac{81}{x^4}\right)$$

$$= 16x^8 - 96x^5 + 216x^2 - \frac{216}{x} + \frac{81}{x^4}$$

எ.கா. 3.55 : ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 11^7ன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$11^7 = (1 + 10)^7$$

$$= {}_7C_0\,(1)^7\,(10)^0 + {}_7C_1\,(1)^6\,(10)^1 + {}_7C_2(1)^5(10)^2 + {}_7C_3(1)^4(10)^3 + {}_7C_4\,(1)^3(10)^4 + {}_7C_5\,(1)^2\,(10)^5 + {}_7C_6\,(1)^1\,(10)^6 + {}_7C_7\,(1)^0\,(10)^7$$

$$= 1 + 70 + \frac{7 \times 6}{1 \times 2}\,10^2 + \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}\,10^3 + \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}\,10^4 + \frac{7 \times 6}{1 \times 2}\,10^5 + 7(10)^6 + 10^7$$

$$= 1 + 70 + 2100 + 35000 + 350000 + 2100000 + 7000000 + 10000000$$

$$= 19487171$$

எ.கா. 3.56: $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{17}$ ன் விரிவாக்கத்தில் x^5ன் குணகத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{17}$ -ன் விரிவில், பொது உறுப்பு

$$T_{r+1} = {}_{17}C_r\, x^{17-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r$$

$$= {}_{17}C_r x^{17-4r}$$

x^5 ஐக் கொண்ட உறுப்பு T_{r+1} என்க.

$$\therefore\ 17 - 4r = 5 \quad \Rightarrow\ r = 3$$

$$\therefore\ T_{r+1} = T_{3+1}$$

$$= {}_{17}C_3\, x^{17-4(3)} = 680x^5$$

$\therefore\ x^5$-ன் குணகம் $= 680$

எ.கா. 3.55: $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ -ன் விரிவாக்கத்தில் மாறிலி உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ -ன் விரிவில்,

$$T_{r+1} = {}_{10}C_r \left(\sqrt{x}\right)^{10-r} \left(\frac{-2}{x^2}\right)^r$$

$$= {}_{10}C_r\, x^{\frac{10-r}{2}} \frac{(-2)^r}{x^{2r}} = {}_{10}C_r\, (-2)^r\, x^{\frac{10-r}{2} - 2r}$$

$$= {}_{10}C_r\, (-2)^r\, x^{\frac{10-5r}{2}}$$

மாறிலி உறுப்பு T_{r+1} என்க,

$$\therefore\ \frac{10-5r}{2} = 0 \ \Rightarrow\ r = 2$$

$\therefore$ மாறிலி உறுப்பு $= {}_{10}C_2\, (-2)^2\, x^{\frac{10-5(2)}{2}}$

$$= \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times 4 \times x^0$$

$$= 180$$

எ.கா. 3.58: $n \in N$ எனில், $(1 + x)^n$-ன் விரிவில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^n$

(ii) ஒற்றை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் = 2^{n-1}

தீர்வு :

$(1+x)^n$ ன் விரிவிலுள்ள கெழுக்கள் $nC_0, nC_1, nC_2, \ldots, nC_n$ என்பன *ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இவைகளை நாம்* $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ *என எழுதுகிறோம்.*

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_rx^r + \ldots + C_nx^n$$

இது x*-ல் உள்ள ஒரு முற்றொருமையாகும். அதனால்,* x*-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் இது உண்மையாகும்.*

$x = 1$ *எனப் பிரதியிட,*

$$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n \qquad \ldots (1)$$

$x = -1$ *எனப் பிரதியிட,*

$$0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots (-1)^n C_n$$

$$\Rightarrow \quad C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots$$

எனவே, $C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = 2^{n-1}$

என்று நிரூபித்தால் போதுமானது.

$$C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = k \quad \ldots (2)$$ *என்க.*

(1)*லிருந்து,* $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 2^n$

$$2k = 2^n \qquad \text{(2)லிருந்து}$$

$$k = 2^{n-1}$$

(2) *லிருந்து,* $C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = 2^{n-1}$

பயிற்சி 3.7

(1) *ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை விரிவாக்குக*

(i) $(3a+5b)^5$ (ii) $(a-2b)^5$ (iii) $(2x-3x^2)^5$

(iv) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^{11}$ (v) $(x^2+2y^3)^6$ (vi) $\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^4$

(2) *பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.*

(i) $\left(\sqrt{2}+1\right)^5 + \left(\sqrt{2}-1\right)^5$ (ii) $\left(\sqrt{3}+1\right)^5 - \left(\sqrt{3}-1\right)^5$

(iii) $\left(1+\sqrt{5}\right)^{5}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{5}$ (iv) $\left(2\sqrt{a}+3\right)^{6}+\left(2\sqrt{a}-3\right)^{6}$

(v) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{7}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{7}$

(3) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(101)^3$ மற்றும் $(99)^3$ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(4) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(0.998)^3$ன் மதிப்பைக் காண்க.

(5) விரிவாக்கத்தின் மைய உறுப்பினைக் காண்க.

(i) $\left(3x-\frac{2x^2}{3}\right)^{8}$ (ii) $\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)^{16}$

(iii) $\left(\frac{a}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$ (iv) $(x-2y)^{13}$ (v) $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{17}$

(6) (i) $(1+x)^{2n}$ இன் மைய உறுப்பு $\frac{1.3.5.7\ \dots\ (2n-1)2^n\,x^n}{n!}$

(ii) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{2n}$ இன் மைய உறுப்பு $\frac{1.3.5.\ \dots\ (2n-1)}{n!}$

(iii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ இன் மைய உறுப்பு $\frac{(-1)^n\ .\ 1.3.5.7.\ \dots\ (2n-1)}{n!}$ 2^n எனக் காட்டுக

(7) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{11}$ இன் விரிவாக்கத்தில் x^5இன் குணகத்தைக் காண்க.

(8) (i) $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ (ii) $\left(\frac{4x^2}{3}-\frac{3}{2x}\right)^{9}$ (iii) $\left(9x-\frac{b}{cx^2}\right)^{17}$

ஆகிய விரிவாக்கங்களில் x-ஐச் சாராத (மாறிலி உறுப்பு) உறுப்பினைக் காண்க.

(9) $(1+x)^{20}$இன் விரிவாக்கத்தில், rவது மற்றும் $(r+1)$வது உறுப்புகளின் குணகங்கள் $1:6$ விகிதத்தில் இருந்தால், rன் மதிப்பைக் காண்க.

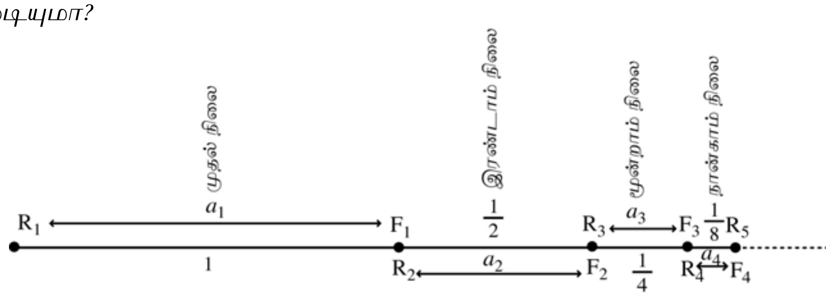
(10) $(1+x)^n$இன் விரிவாக்கத்தில், 5, 6 மற்றும் 7வது உறுப்புகளின் குணகங்கள் கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், n-ஐக் காண்க.

4. தொடர் முறையும் தொடரும்

4.1 அறிமுகம்:

நாம் அடிக்கடி கேள்விப்படும் *"நிகழ்ச்சிகளின் வரிசைக்கிரமம் (வரிசை)"*, *"இறுதித் தேர்வுக்கு முன்பு வரிசையாக நடத்தப்படும் திருப்புதல் தேர்வுகளின் தொடர்"*, *"கிரிக்கெட் தேர்வுப் போட்டியின் தொடர் ஆட்டங்கள்"* என்பன போன்ற கூற்றுகளில் வரிசைக்கிரமம் மற்றும் தொடர் ஆகிய வார்த்தைகள் ஒரே அர்த்தத்தில் கையாளப்பட்டிருப்பதைக் காண்கிறோம். கணித ரீதியாக நோக்கும்போது இவ்வார்த்தைகள் தொழில்நுட்பமுள்ள வெவ்வேறு சிறப்பான அர்த்தங்களை அளிக்கக்கூடியனவையாகும். ஒரு தொகுப்பிலுள்ள பொருட்களை முறையாக வரிசைப்படுத்துதலைக் குறிப்பிட தொடர்முறை என்ற வார்த்தையை பயன்படுத்தும் அதே நேரத்தில் தொடர் என்ற வார்த்தையை வேறொரு அர்த்தத்தில் பயன்படுத்துவது சிறந்ததாகும்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டினை ஆராய்வோம். ஒரு முயலும் தவளையும் ஒரே திசையில் குதித்த வண்ணமாய் உள்ளன. ஆரம்பத்தில் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரம் ஒரு மீட்டர் என்க. முயலானது தவளையைப் பிடிக்கும் எண்ணத்துடன் அதனை நோக்கி குதிக்கிறது. அதே சமயத்தில் தவளையானது தன்னை காப்பாற்றிக் கொள்ள அந்த இடத்தை விட்டு பாதித் தூரமான $\frac{1}{2}$ மீட்டர் தூரத்திற்கு முன்னே தாவுகிறது. ஒவ்வொரு முறையும் தவளையானது முந்தைய தூரத்தில் பாதி தூரத்திற்கு தாவுகிறது. இச்செயல் தொடர்ந்து நடைபெற்றால் முயலானது தவளையைப் பிடிக்க முடியுமா?



படம் 4. 1

முதல், 2ம், 3ம், 4ம், ... நிலைகளில் முயலுக்கும் தவளைக்கும் இடைப்பட்டத் தூரங்கள் முறையே $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ என்க. முதல் நிலையில் முயலுக்கும் தவளைக்கும் இடைப்பட்டத் தூரம் 1 மீட்டர் ஆதலால்,

$$a_1 = 1 \; ; \; a_2 = \frac{1}{2} \; ; \; a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \; ; \; a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

a_1, a_2, a_3 … ஒரு தொடர் முறையாகும். இவற்றின் வரிசையில் ஒரு ஒழுங்குற அமைக்கும் நியதியிருப்பதைக் காண்கிறோம். இங்கு a_n என்பது nஆவது நிலையில் முயலுக்கும் தவளைக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்பது தெளிவு.

மேலும் $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. $n \to \infty$ எனில் $a_n \to 0$

i.e. $n \to \infty$ எனும் போது முயலுக்கும் தவளைக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் பூச்சியமாகும். இந்நிலையில் முயலானது தவளையைப் பிடிக்கும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டின் மூலம் ஒவ்வொரு இயல் எண் உடன் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணை தொடர்புபடுத்த முடியும் என்பதை அறிகிறோம்.

i.e.	1	2	3	…	n
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
	a_1	a_2	a_3	…	a_n
	$= 1$	$= \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	$= \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	…	$= \frac{1}{2^{n-1}}$

பின்வரும் எண்களின் வரிசையைக் காண்க.

(a) 8, 15, 22, 29, …… (b) 6, 18, 54, 162, ……

(a)-ல் முதல் எண் 8, இரண்டாம் எண் 15, மூன்றாம் எண் 22 ... இதில் இடம் பெறும் ஒவ்வொரு எண்ணும் அதற்கு முந்தின எண்ணுடன் 7-ஐக் கூட்ட பெறப்படுவதைக் காண்கிறோம்.

(b)-ல் முதல் எண் 6, இரண்டாம் எண் 18, மூன்றாம் எண் 54 ... இதில் இடம்பெறும் ஒவ்வொரு எண்ணும் அதற்கு முந்தின எண்ணை 3ஆல் பெருக்கி பெறப்படுவதைக் காண்கிறோம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் பின்வரும் விவரங்களை நாம் காணமுடிகிறது.

(i) உறுப்புகள் ஒரு நிபந்தனைக்குட்பட்டு எழுதப்பட்டுள்ளன. (அமைப்பு).

(ii) வரிசையாக அமைந்துள்ள உறுப்புகள் (வரிசை).

இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில் ஒரு குறிப்பிட்ட வரிசையில், ஏதேனும் ஒரு நிபந்தனைக்குட்பட்டு எண்கள் அமைக்கப்படுவது ஒரு தொடர்முறை என்பதாகும்.

4.2 *தொடர்முறை* (Sequence) :

ஒரு தொடர்முறை என்பது இயல் எண் கணத்திலிருந்து மெய்யெண் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் ஒரு சார்பாகும்.

ஒரு தொடர்முறையை a *எனக் குறிப்பிடுவோமாயின்,* a-*ன் கீழ்* $n \in \mathrm{N}$-*ன் பிம்பமானது* $a(n) = a_n$ *எனக் குறிப்பிடப்படும்.*

இவ்வாறாக, 1, 2, 3, … n … *என்ற இயல் எண்களிடத்து* a-*ன் பிம்பங்களாவன* $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, \ldots$ *ஆகும். இங்கு* $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, \ldots$ *யாவும் ஒரு தொடர்முறையை அமைக்கும்.*

"*ஒரு தொடர் முறையானது அதன் வீச்சால்* (range) *எழுதப்படும்*".

சுழல் சூத்திரம் (Recursive formula) :

ஒரு தொடர்முறையை நிர்ணயிக்க அதன் முதல் சில உறுப்புகளை எழுதுவதோடு மட்டுமின்றி, மற்ற உறுப்புகளையும் அவற்றிற்கு முந்தைய உறுப்புகளின் வாயிலாக எழுத உதவும் ஒரு சூத்திரத்தையும் சொல்லுவது சிறந்ததாகும். இச்சூத்திரத்தையே சுழல் சூத்திரம் என்பர்.

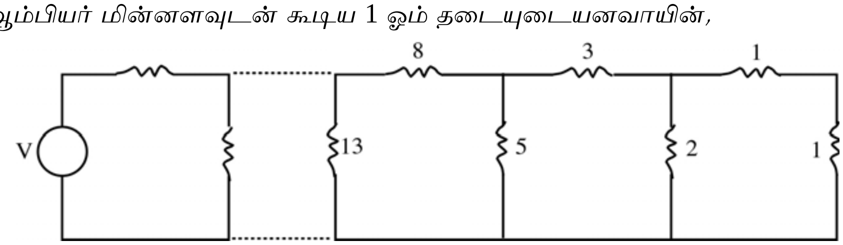
எடுத்துக்காட்டாக, 1, 4, 5, 9, 14, … *என்பது ஒரு தொடர்முறையாகும். இதில் முதல் இரு உறுப்புகளைத் தவிர்த்து மற்ற உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் அதற்கு முந்தைய இரு உறுப்புகளின் கூடுதல் என்ற விதிக்குட்பட்டிருப்பதால் இது ஒரு தொடர் முறையாகும். இதற்குரிய சுழல் சூத்திரம்* $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \geq 1$, *இங்கு* a_1=1, a_2= 4

ஒரு தொடர்முறையில் இடம்பெறும் பல்வேறு எண்களை அதன் உறுப்புகள் என்பர். இவற்றை $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *எனக் குறிப்பிடுவர். கீழ் குறிகள் அவற்றின் இருப்பிடத்தைத் தருகின்றன.* n*ஆவது உறுப்பை பொது உறுப்பு எனக் கொள்வர்.*

எடுத்துக்காட்டாக, 1, 3, 5, 7, … $2n - 1$, … *என்ற தொடர்முறையில்*

முதல் உறுப்பு = 1, *இரண்டாம் உறுப்பு* = 3, … … n*ம் உறுப்பு* $2n - 1$

பின்வரும் மின்சுற்றில் தடுப்பான்கள் அரத்தின் பற்கள் வடிவில் அமைந்த கோடுகளால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. இத்தடுப்பான்கள் யாவும் 1 *ஆம்பியர் மின்னளவுடன் கூடிய* 1 *ஓம் தடையுடையனவாயின்,*



படம் 4. 2

அவற்றின் வழியாக காணப்பெறும் வோல்டேஜ் ஆனது, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … ஆகும்.

இரண்டாம் உறுப்பிற்கு பின் வருகின்ற ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு முந்தின இரு உறுப்புகளின் கூடுதலாக பெறப்படுவதைக் காண்கிறோம். இத்தொடர் முறையின் உறுப்புகளைப் பின்வருமாறு தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கலாம்.

i.e.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 1 \\
V_2 &= 1 \\
V_3 &= V_2 + V_1 \\
V_4 &= V_3 + V_2 \\
V_5 &= V_4 + V_3 \\
&\;\vdots \\
V_n &= V_{n-1} + V_{n-2} \\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

இவ்வாறாக மேற்கண்ட தொடர் முறையானது பின்வரும் விதியால் தரப்படும் :

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 1 \\
V2 &= 1 \\
Vn &= Vn - 1 + Vn - 2 \quad ; \quad n \geq 3
\end{aligned}
$$

இத்தொடர்முறையை பிபுனாக்கி தொடர்முறை (Fibonacci sequence) என்பர். இதில் இடம்பெறும் எண்களை பிபுனாக்கி எண்கள் என்பர். இத்தொடர்முறையைக் கண்டுபிடித்தவர் இத்தாலிய கணிதமேதை லியோனார்டோ பிபுனாக்கி என்பவர். ஆதலால் அவருடைய பெயரால் இத்தொடர்முறைகள் அழைக்கப்படுகின்றன.

எ.கா. 4.1:

ஒரு தொடர் முறையின் nவது உறுப்பு $(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ எனில் அதன் 7வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது

$n = 7$ எனப் பிரதியிட

$$a_7 = (-1)^{7+1}\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{8}{7}$$

4.3 தொடர்கள் (Series) :

1, 3, 5, 7, 9 என்கிற முடிவான தொடர்முறைக்கு அதன் கூடுதல் 1 + 3 + 5 + 7 + 9 என்பது ஒரு வரையறுத்த முடிவுள்ள மதிப்பான 25-ஐப் பெற்றுள்ளது. ஆனால் அதே சமயத்தில் 1, 3, 5, 7, … என்கிற முடிவற்ற தொடர்முறையை எடுத்துக் கொள்வோமாயின், அதன் கூடுதல் 1 + 3 + 5 + 7 + … ஒரு வரையறுத்த மதிப்பை தருவதில்லை. ஏனெனில் நிறைய உறுப்புகளைக் கூட்டிக்கொண்டே செல்வதன் மூலம் கூடுதலின் மதிப்பானது வரம்பின்றி அதிகரிக்க வாய்ப்புள்ளது. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + … ஒரு முடிவற்ற தொடராகும். இவ்வாறாக ஒரு தொடரானது, தொடர்முறையின் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படும்.

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ என்பது ஒரு முடிவற்றத் தொடர்முறையாயின், $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ஆனது ஒரு முடிவற்றத் தொடராகும்.

இதனை $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$-ன் n-வது பகுதிக் கூடுதலானது, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ஆகும்.

எ.கா. 4.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ -ன் n-வது பகுதிக் கூடுதலைக் காண்க.

தீர்வு :

$$S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{and } S_{n+1} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \ldots (1)$$

S_{n+1}-ஐப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$S_{n+1} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}\,[1 + S_n] \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)யிலிருந்து $S_n + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,[1 + S_n]$

$$2S_n + \frac{1}{2^n} = 1 + S_n$$

$$\therefore\; S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

குறிப்பு **:** இதனைப் பெருக்குத் தொடர் கொள்கையைப் பயன்படுத்தியும் அடையலாம். ஒரு பெருக்குத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$ எனத் தெரியும்.

இங்கு $a = \frac{1}{2}$, $n = n$, $r = \frac{1}{2}$ (< 1)

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

பயிற்சி 4.1

(1) பின்வரும் தொடர்முறை ஒவ்வொன்றிலும் முதல் 5 உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) $a_n = (-1)^{n-1}\,5^{n+1}$ (ii) $a_n = \frac{n(n^2 + 5)}{4}$ (iii) $a_n = -11n + 10$

(iv) $a_n = \frac{n + 1}{n + 2}$ (v) $a_n = \frac{1 - (-1)^n}{3}$ (vi) $a_n = \frac{n^2}{3^n}$

(2) பின்வருவனவற்றில் nவது உறுப்பாக பெற்றுள்ள தொடர்முறைகளின் தேவையான உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$; a_5 , a_7 (ii) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; a_4 , a_5

(iii) $a_n = \frac{(n + 1)^2}{n}$; a_7 , a_{10} (iv) $a_n = (-1)^{n-1}\,2^{n+1}$, a_5 , a_8

(3) கீழ்க்காணும் a_n-ஐப் பொது உறுப்பாகக் கொண்ட தொடர் முறையின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க.

$$a_n = \begin{cases} n^2 - 1, & n \text{ ஒற்றை எண் எனில்} \\ \frac{n^2 + 1}{2}, & n \text{இரட்டை எண் எனில்} \end{cases}$$

(4) *பின்வரும் தொடர்முறைகளில் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை எழுதுக.*

(i) $a_1 = a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} - 1, \quad n > 2$

(ii) $a_1 = 1, \ a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$

(iii) $a_1 = 1, \ a_n = na_{n-1}, n \geq 2$

(iv) $a_1 = a_2 = 1, \ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n > 2$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ *-ன் nஆவது பகுதிக் கூடுதலைக் காண்க.*

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n$*-ன் முதல் n உறுப்புகள் வரையிலான கூடுதலைக் காண்க.*

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *-ன் 101ஆவது உறுப்பிலிருந்து 200வது உறுப்பு வரையிலான உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.*

4.4 சில சிறப்பான தொடர்முறைகளும் அவற்றின் தொடர்களும்:

(1) கூட்டுத் தொடர் முறை (Arithmetic Progression) :

முதல் உறுப்பைத் தவிர்த்து, மற்ற ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு உடனடியாக முன்னால் அமைந்த உறுப்புடன் ஒரு நிலையான எண்ணைக் கூட்டுவதால் பெறப்பட்டால், அத்தகைய உறுப்புகள் யாவும் அடங்கிய தொடர்முறையை கூட்டுத் தொடர்முறை (Arithmetic progression A.P) *என்பர். இந்நிலையான எண்ணை பொது வித்தியாசம் என்பர். இதனை d எனக் குறிப்பிடுவர்.*

எடுத்துக்காட்டாக, 1, 3, 5, 7, … *என்பது ஒரு* A.P *ஆகும். இதன் பொது வித்தியாசம்* 2 *ஆகும்.*

(2) கூட்டுத் தொடர் (Arithmetic Series):

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் A.P*ல் இருப்பின் அதனைக் கூட்டுத் தொடர் என்பர்.* 1 + 3 + 5 + 7 + … *ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.*

(3) பெருக்குத் தொடர் முறை (Geometric progression) :

ஒரு தொடர்முறையின் முதல் உறுப்பு பூச்சியமற்றதாயும், மற்ற ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கு உடனடியாக முன்னால் அமைந்த உறுப்பினை ஒரு நிலையான பூச்சியமற்ற எண்ணால் பெருக்கி பெறப்பட்டால், அத்தொடர்முறையை பெருக்குத் தொடர் முறை (Geometric progression G.P.) *என்பர். இந்நிலையான எண்ணை பொது விகிதம் என்பர். இது* 'r'*எனக் குறிப்பிடப்படும்.*

ஒரு G.P.*ன் பொதுவான அமைப்பு* $a, ar, ar^2, \ldots, a \neq 0$ *மற்றும்* $r \neq 0$

(4) பெருக்குத் தொடர் (Geometric series) :

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர் ஆகும். ஏனெனில் இதன் உறுப்புகள் G.P.ல் உள்ளன. ஒரு பெருக்குத் தொடர் முடிவானதாகவோ (அ) முடிவற்றதாகவோ இருப்பது அதற்குரிய G.P.ல் முடிவான (அல்லது) முடிவற்ற உறுப்புகள் உள்ளதைப் பொறுத்ததாகும்.

(5) இசைத் தொடர் முறை (Harmonic progression) :

ஒரு தொடர் முறையின் உறுப்புகளின் தலைகீழ் மதிப்புகள் A.P.-ல் இருப்பின் அத்தொடர்முறை ஒரு இசைத் தொடர்முறை எனப்படும்.

ஒரு H.P-ன் பொதுவான அமைப்பு $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \ldots$, இங்கு $a \neq 0$.

இதன் nவது உறுப்பு $T_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$

$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \ldots$ஒரு H.P. ஆகும். ஏனெனில் அவற்றின் தலைகீழ் மதிப்புகளான 1, 5, 9, 13, … A.P. ல் உள்ளன.

குறிப்பு : A.P., G.P.யில் உள்ளது போல் H.P.யில் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண பொதுவான சூத்திரம் கிடையாது.

எ.கா. 4.3 ஒரு H.P.ன் 5வது மற்றும் 12வது உறுப்புகள் முறையே 12 மற்றும் 5 எனில் அதன் 15வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$T_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$$

$$T_5 = 12 \Rightarrow \frac{1}{a + (5-1)d} = 12 \Rightarrow \frac{1}{a + 4d} = 12$$

$$a + 4d = \frac{1}{12} \quad \ldots (1)$$

மற்றும் $$T_{12} = 5 \Rightarrow \frac{1}{a + (12-1)d} = 5 \Rightarrow \frac{1}{a + 11d} = 5$$

$$\Rightarrow \quad a + 11d = \frac{1}{5} \quad \ldots (2)$$

$$(2) - (1) \quad 7d = \frac{7}{60} \Rightarrow d = \frac{1}{60}$$

$$(1) \Rightarrow a + 4\left(\frac{1}{60}\right) = \frac{1}{12}$$

$$a + \frac{4}{60} = \frac{1}{12} \Rightarrow a = \frac{1}{12} - \frac{4}{60}$$

$$a = \frac{1}{60}$$

$$\therefore \ T_{15} = \frac{1}{a + (15-1)d} = \frac{1}{\frac{1}{60} + 14 \times \frac{1}{60}} = \frac{1}{\frac{15}{60}} = \frac{60}{15}$$

$$T_{15} = 4$$

4.5 தொடர்முறைகளின் சராசரிகள் (Means of Progression) :

4.5.1 கூட்டுச் சராசரி :

a,A, b ஆகியவை AP-ல் இருப்பின் Aஆனது a மற்றும் b-ன் கூட்டுச்சராசரி எனப்படும். மறுதலையாக, A என்பது a-க்கும் b-க்கும் இடைப்பட்ட கூட்டுச்சராசரி எனில், a, A, b ஆகியவை AP-ல் இருக்கும்.

$$\Rightarrow \quad A - a = b - A$$

$$\Rightarrow \quad 2A = a + b$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{a+b}{2}}$$

பொதுவாக a, A_1, A_2, … , A_n, b என்பவை A.P.-ல் இருப்பின் A_1, A_2, … A_n ஆகியவை தரப்பட்ட இரண்டு எண்களான aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட கூட்டுச்சராசரிகள் எனப்படும். மறுதலையாக A_1, A_2, … , A_n, என்பவை aக்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட கூட்டுச்சராசரிகள் எனில், a, A_1, A_2, … , A_n, b என்பது A.P. ஆகும்.

எ.கா. 4.4 : a மற்றும் bக்கும் இடையேயுள்ள n கூட்டுச்சராசரிகளைக் காண்க. மேலும் அவற்றின் கூடுதலையும் காண்க.

தீர்வு :

a மற்றும் bக்கும் இடையேயுள்ள n கூட்டுச்சராசரிகள் A_1, A_2, … , A_n என்க. கூட்டுச்சராசரியின் வரையறையிலிருந்து a, A_1, A_2, … , A_n , b என்பவை A.Pல் இருக்கும். பொது வித்தியாசம் d என்க.

$\therefore$ $A_1 = a + d$, $A_2 = a + 2d$, $A_3 = a + 3d$, … , $A_n = a + nd$ மற்றும் $b = a + (n+1)d$

$$\Rightarrow \quad (n+1)d = b - a$$

$$\therefore \ d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$\therefore \ A_1 = a + \frac{b-a}{n+1} \ ; \quad A_2 = a + \frac{2(b-a)}{n+1} \ \ldots \ A_n = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

a மற்றும் bக்கும் இடையேயுள்ள n கூட்டுச்சராசரிகளின் கூடுதல்

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \left[a + \frac{b-a}{n+1}\right] + \left[a + \frac{2(b-a)}{n+1}\right] + \ldots + \left[a + \frac{n(b-a)}{n+1}\right]$$

$$= na + \frac{(b-a)}{n+1}[1+2+\ldots+n]$$

$$= na + \frac{(b-a)}{(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = na + \frac{n(b-a)}{2}$$

$$= \frac{2na+nb-na}{2} = \frac{na+nb}{2} = n\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

எ.கா. 4.5: *இரண்டு எண்களுக்கு இடையேயுள்ள n கூட்டுச்சராசரிகளின் கூடுதலானது அவ்விரண்டு எண்களின் தனித்த கூட்டுச்சராசரி போல் n மடங்கு இருக்கும் என நிறுவுக.*

தீர்வு :

a மற்றும் bக்கும் இடையேயுள்ள n கூட்டுச்சாராசரிகள் $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்க.

எடுத்துக்காட்டு 4.4லிருந்து

$$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n = n\left(\frac{a+b}{2}\right) = n \ (a \text{ மற்றும் } b\text{யின் கூட்டுச்சராசரி})$$

$$= n \ (a \text{ மற்றும் } b\text{-ன் தனித்த கூட்டுச்சராசரி})$$

எ.கா. 4.6: *-1 மற்றும் 14 இடையே அமையுமாறு 4 கூட்டுச்சராசரிகளைக் காண்க.*

தீர்வு : -1 மற்றும் 14க்கும் இடையேயுள்ள 4 கூட்டுச்சராசரிகள் A_1, A_2, A_3, A_4 என்க. வரையறையிலிருந்து $-1, A_1, A_2, A_3, A_4, 14$ ஆகியவை A.P.யில் இருக்கும் பொது வித்தியாசம் d என்க.

$\therefore A_1 = -1 + d, ; A_2 = -1 + 2d ; A_3 = -1 + 3d, ; A_4 = -1 + 4d ; 14 = -1+5d$

$\therefore d = 3$

$\therefore A_1 = -1 + 3 = 2 ; A_2 = -1+2 \times 3 = 5 ; A_3 = -1+3\times3 = 8 ; A_4 = -1 + 12 = 11$

$\therefore$ 2, 5, 8 மற்றும் 11 ஆகியவை தேவையான நான்கு கூட்டுச்சராசரிகள் ஆகும்.

4.5.2 *பெருக்குச்சராசரி* (Geometric Mean) :

a மற்றும் b என்ற எண்களின் பெருக்குச் சராசரி Gஆக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு a, G, b என்பவை G.P.ல் இருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

$$\Rightarrow \qquad \frac{G}{a} = \frac{b}{G} = r$$

$$\Rightarrow \qquad G^2 = ab$$

$$G = \pm\sqrt{ab}$$

குறிப்பு :

(1) a, b மிகை எண்கள் $G = +\sqrt{ab}$ ஆகும்.

(2) a, b குறை எண்கள் எனில் $G = -\sqrt{ab}$ ஆகும்.

(3) a, b இரண்டும் வெவ்வேறான குறிகள் பெற்றிருப்பின் G.M ஆனது ஒரு மெய்யெண் அல்ல. இதனைத் தவிர்த்து விடலாம். ஏனென்றால் நாம் மெய்த் தொடர்களை மட்டுமே கருத்தில் கொள்கிறோம்.

(அ.து.) a, b இரண்டும் வெவ்வேறான குறிகள் கொண்டவை எனில் அவற்றின் G.M காண இயலாது.

எ.கா. 4.7: *தரப்பட்டுள்ள a மற்றும் b எண்களுக்கு இடைப்பட்ட n பெருக்குச் சராசரிகளைக் காண்க. மேலும் அவற்றின் பெருக்கலையும் காண்க.*

தீர்வு :

a மற்றும் bக்கும் இடைப்பட்ட n பெருக்குச் சராசரிகள் $G_1, G_2, \ldots, G_n$ என்க. வரையறையிலிருந்து $a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ என்பவை G.P.யில் இருக்கும். அவற்றின் பொது விகிதம் r என்க.

அவ்வாறாயின் $G_1 = ar,\ \ G_2 = ar^2, \ldots, G_n = ar^n$ மற்றும் $b = ar^{n+1}$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \qquad \therefore\ r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \qquad G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \ \ldots\ G_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

அவற்றின் பெருக்கல்

$$\begin{aligned} G_1 . G_2 . G_3 . G_n &= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} . a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \ldots a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= a^n\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1+2+\ldots+n}{n+1}}\right] \\ &= a^n\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}}\right] = a^n\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= (ab)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

எ.கா. 4.8: 576 *மற்றும்* 9 *ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட* 5 *பெருக்குச் சராசரிகளைக் காண்க.*

தீர்வு : $a = 576$ *மற்றும்* $b = 9$ *ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட* 5 G.M.கள் G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 *என்க. பொது விகிதம்* r *என்க.*

$$G_1 = 576r,\ G_2 = 576r^2,\ G_3 = 576r^3,\ G_4 = 576r^4,\ G_5 = 576r^5,\ \ 9 = 576r^6$$

$$\Rightarrow \qquad r^6 = \frac{9}{576} \ \Rightarrow\ r = \left(\frac{9}{576}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad G_1 = 576r = 576 \times \frac{1}{2} = 288 \qquad G_2 = 576r^2 = 576 \times \frac{1}{4} = 144$$

$$G_3 = 576r^3 = 576 \times \frac{1}{8} = 72 \qquad G_4 = 576r^4 = 576 \times \frac{1}{16} = 36$$

$$G_5 = 576r^5 = 576 \times \frac{1}{32} = 18$$

எனவே 576 *மற்றும்* 9-*க்கும் இடைப்பட்ட தேவையான* G.M.கள் 288, 144, 72, 36, 18 *ஆகும்.*

எ.கா. 4.9:

b *என்பது* a *மற்றும்* c, $(a \neq c)$*க்கான* A.M. *என்க.* $(b - a)$ *என்பது* a , $(c - a)$*யின்* G.M. *என்க. அவ்வாறாயின்* $a : b : c = 1 : 3 : 5$ *எனக் காட்டுக.*

தீர்வு : b *என்பது* a *மற்றும்* c*க்கான* A.M *என்பதால்* a, b, c *என்பவை* A.P.*ல் இருக்கும். பொது வித்தியாசம்* d *என்க.*

$$\therefore b = a + d \qquad \dots (1)$$

$$c = a + 2d \qquad \dots (2)$$

$(b - a)$ *ஆனது* a *மற்றும்* $(c - a)$*க்கான* G.M. *என்பதால்*

$$\therefore (b - a)^2 = a(c - a)$$

$$d^2 = a(2d) \qquad \text{(1), (2)விருந்து}$$

$$\Rightarrow \qquad d = 2a \qquad [\because d \neq 0]$$

$$\therefore b = a + d \qquad\qquad c = a + 2d$$

$$b = a + 2a \qquad\qquad c = a + 2(2a)$$

$$\boxed{b = 3a} \qquad\qquad \boxed{c = 5a}$$

$$\therefore a : b : c = a : 3a : 5a$$

$$= 1 : 3 : 5$$

4.5.3 *இசைச் சராசரி* (Harmonic mean) :

a, H, b ஆகியவை H.P.ல் இருந்தால் H-ஆனது a மற்றும் b-க்குரிய H.M. எனப்படும்.

a, H, b ஆனது H.Pல் இருப்பின் $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{\text{H}}$, $\frac{1}{b}$ ஆகியவை A.Pல் இருக்கும்.

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\text{H}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \quad ; \quad \frac{2}{\text{H}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\boxed{\text{H} = \frac{2ab}{a+b}}$$

இந்த H ஆனது a மற்றும் bக்கும் இடையேயான தனித்த இசைச் சராசரி ஆகும்.

***வரையறை* :**

a, H_1, H_2, ... H_n, b ஆகியவை H.P-ல் இருப்பின் aக்கும் bக்கும் இடையே உள்ள H_1, H_2, … H_n என்பவை n இசைச் சராசரிகள் எனப்படும்.

A.M., G.M. *மற்றும்* H.M. *ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பு* :

எ.கா. 4.10: a, b இரண்டும் வெவ்வேறான மிகை எண்கள் எனில் (i) A.M., G.M., H.M. ஆகியவை G.P.யில் இருக்கும் எனவும் (ii) A.M > G.M > H.M எனவும் நிரூபிக்க.

***நிரூபணம்* :**

$$\text{A.M.} = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \text{G.M.} = \sqrt{ab} \quad ; \quad \text{H.M.} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{(i)} \qquad \frac{\text{G.M}}{\text{A.M}} = \frac{\sqrt{ab}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{\text{H.M}}{\text{G.M}} = \frac{\frac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து

$$\frac{\text{G.M}}{\text{A.M}} = \frac{\text{H.M}}{\text{G.M}}$$

$\therefore$ A.M, G.M, H.M ஆகியவை G.Pல் இருக்கும்.

$$\text{(ii)}\,\text{A.M} - \text{G.M} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} > 0 \qquad \because a > 0 \,;\, b > 0 \,;\, a \neq b$$

$$\text{A.M} > \text{G.M} \qquad \dots (1)$$

$$\text{G.M} - \text{H.M} = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,(a+b) - 2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}\,\left[a+b-2\sqrt{ab}\right]}{a+b}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} > 0$$

$$\therefore \quad \text{G.M} > \text{H.M} \qquad \dots (2)$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து A.M. > G.M > H.M

பயிற்சி 4.2

(1) (i) 1 மற்றும் 19க்கும் இடையேயான ஐந்து கூட்டுச்சராசரிகளைக் காண்க.

(ii) 3 மற்றும் 17க்கும் இடையேயான 6 கூட்டுச்சராசரிகளைக் காண்க.

(2) (i) 7 மற்றும் 13 (ii) 5 மற்றும் – 3 (iii) $(p + q)$ மற்றும் $(p - q)$ இடையேயான தனித்த A.M-ஐக் காண்க,

(3) b என்பது a மற்றும் c-ன் G.M. என்க. x என்பது a மற்றும் b-ன் A.M. என்க. y என்பது b மற்றும் c-ன் A.M. என்க. இவ்வாறாயின் $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = 2$ என நிறுவுக.

(4) ஒரு H.P-ன் முதல் மற்றும் இரண்டாம் உறுப்புகள் முறையே $\frac{1}{3}$ மற்றும் $\frac{1}{5}$ எனில் 9வது உறுப்பைக் காண்க.

(5) a, b, c ஆகியவை H.P.ல் இருப்பின் $\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2$ என நிறுவுக.

(6) இரு மிகை எண்களுக்கு இடைப்பட்ட வித்தியாசம் 18 மற்றும் அவற்றின் G.Mன் 4 மடங்கு மதிப்பானது H.M.-ன் 5 மடங்குக்குச் சமமாயின், அந்த எண்களைக் காண்க.

(7) இரு எண்களின் A.M-ன் மதிப்பு 1 எனில், அவற்றின் H.M ஆனது G.M.-ன் வர்க்கத்திற்கு சமமாயிருக்கும் என நிறுவுக.

(8) a, b, c ஆகியவை A.P.யிலும் a, mb, c ஆகியவை G.Pயிலும் இருப்பின் a, m^2b, c ஆகியவை H.P-ல் இருக்கும் என நிறுவுக.

(9) ஒரு H.P.-ன் p^{th} மற்றும் q^{th} உறுப்புகள் முறையே q மற்றும் p எனில் அதன் $(pq)^{th}$ உறுப்பு 1 எனக் காட்டுக.

(10) மூன்று எண்கள் ஒரு H.P.-ஐ அமைக்கின்றன. அவற்றின் கூடுதல் 11 மற்றும் அவற்றின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் 1 எனில் அந்த எண்களைக் காண்க.

4.6 சில சிறப்பான தொடர்கள் (Some special types of series) :

4.6.1 *ஈருறுப்புத் தொடர்* (Binomial series)

***ஒரு விகிதமுறு அடுக்குக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றம்* (Binomial Theorem for a Rational Index) :**

ஒரு மிகை முழு எண் அடுக்குக்குரிய ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்தினைச் சென்ற அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம்.

$$(x + a)^n = x^n + nC_1\, x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + nC_n a^n$$

குறிப்பாக,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!}\, x^3 + \ldots + x^n$$

n *ஒரு மிகை முழு எண்ணாயிருக்கையில்,* $(x + a)^n$*-ன் விரிவில் இடம்பெறும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை* $(n+1)$ *ஆகும். எனவே இத்தொடர் ஒரு முடிவான தொடராகும். ஆனால்* n *ஒரு மிகை முழு எண்ணாக இல்லாதிருப்பின், இத்தொடர் ஒரு முடிவற்ற தொடராகும்.*

***தேற்றம்* (*நிரூபணமின்றி*)**

n *என்பது மிகைமுழு எண் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண்ணாயின்,* $|\, x \,| < |$ *என இருக்கையில்*

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}\, x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\, x^3 + \ldots \ldots \text{ ஆகும்}$$

இங்கு $|\, x \,| < |$ *என்ற நிபந்தனை நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. இதற்குரிய காரணத்தைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.*

$x = 1$, $n = -1$ *என மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுவோம்.*

சூத்திரத்தின் இடப்புறம் $= (1 + 1)^{-1} = \frac{1}{2}$,

வலப்புறம் $= 1 + (-1)\,(1) + \frac{(-1)\,(-2)}{2}\, 1^2 + \ldots$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

இருபுறங்களும் சமமற்றிருப்பதற்கான காரணம் யாதெனில் $| x | < 1$ என்பதை $x = 1$ பூர்த்தி செய்யாததே ஆகும்.

n ஒரு மிகை முழு எண்ணாயிருக்கையில் இக்கூடுதலான நிபந்தனை $| x | < 1$ தேவையற்றதாகும்.

மிகைமுழு எண் அடுக்குக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்திற்கும், விகிதமுறு எண் அடுக்குக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசங்கள் :

1. $n \in \mathrm{N}$ எனில் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $(1 + x)^n$ ஆனது நன்கு வரையறுக்கப்படும். nஆனது இயல் எண் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $| x | < |$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டுதான் $(1 + x)^n$-ஐ வரையறுக்க முடியும்.
2. $n \in \mathrm{N}$ எனில் $(1 + x)^n$-ன் விரிவாக்கத்தில் $n + 1$ உறுப்புகள் மட்டுமே இருக்கும். n ஆனது இயல் எண் அல்லாத ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $(1 + x)^n$-ன் விரிவாக்கத்தில் எண்ணிக்கையற்ற உறுப்புகள் இருக்கும்.

சில குறிப்பிட்ட விரிவாக்கங்கள்

n என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் அடுக்காயின்

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!}\, x^3 + \ldots \qquad (1)$$

xக்குப் பதிலாக $-x$ஐப் பிரதியிட

$$(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^2 - \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!}\, x^3 + \ldots \qquad (2)$$

nக்குப் பதிலாக $-n$ஐப் பிரதியிட

$$(1 + x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}\, x^2 - \frac{n(n+1)\,(n+2)}{3!}\, x^3 + \ldots \qquad (3)$$

x-க்குப் பதிலாக $-x$ஐப் பிரதியிட

$$(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}\, x^2 + \frac{n(n+1)\,(n+2)}{3!}\, x^3 + \ldots \qquad (4)$$

குறிப்பு :

(1) அடுக்கு ஒரு குறை எண்ணாயின் தொகுதியிலுள்ள காரணிகளின் மதிப்புகள் சீராக 1 அதிகரிக்கும்.

(2) அடுக்கு ஒரு மிகை எண்ணாயின் தொகுதியிலுள்ள காரணிகளின் மதிப்புகள் சீராக 1 குறையும்.

(3) x மற்றும் n-ன் குறிகள் ஒரே மாதிரியானவையாயின் விரிவாக்கத்தின் எல்லா உறுப்புகளும் மிகையாகும்.

(4) x மற்றும் n-ன் குறிகள் வெவ்வேறானவையாயின் உறுப்புகளின் குறிகள் மாறி மாறி வரும்.

சில சிறப்பான விரிவுகள் :

1. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
2. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
3. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$
4. $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

பொது உறுப்பு :

$|x| < 1$ஆக இருக்கையில், ஒரு விகிதமுறு எண் n-க்கு

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

இந்த விரிவாக்கத்தில்

முதல் உறுப்பு $T_1 = T_{0+1} = 1$

இரண்டாவது உறுப்பு $T_2 = T_{1+1} = nx = \frac{n}{1} x^1$

மூன்றாவது உறுப்பு $T_3 = T_{2+1} = \frac{n(n-1)}{1.2} x^2$

நான்காவது உறுப்பு $T_4 = T_3 \ldots$

$= 1 - 20x + 15(16x^2) - 35(64x^3) + \ldots$

$= 1 - 20x + 240x^2 - 2240x^3 + \ldots$

(ii) $|x^2| < 1$ என்பதால் ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம் $(1 - x^2)^{-4}$-ஐ விரிவுபடுத்தலாம்.

$$= 1 + (4)(x^2) + \frac{(4)(4+1)}{1.2} (x^2)^2 + \frac{(4)(4+1)(4+2)}{1.2.3} (x^2)^3 + \ldots$$

$$= 1 + 4x^2 + 10x^4 + 20x^6 + \ldots$$

எ.கா. 4.12: $|x| < 2$ எனில் $\frac{1}{(2+x)^4}$-ன் விரிவாக்கத்தினை 4-வது உறுப்புவரை காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{1}{(2+x)^4} = (2 + x)^{-4} = 2^{-4} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-4} \qquad |x| < 2 \Rightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{16} \left[1 - (4)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{(4)(4+1)}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{(4)(4+1)(4+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[1 - 2x + \frac{(4)\,(5)}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right) - \frac{(4)\,(5)\,(6)}{1.2.3}\,\frac{x^3}{8} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{x}{8} + \frac{5}{32}\,x^2 - \frac{5}{32}\,x^3 + \ldots$$

எ.கா.4.13: $(1+x)^n = 2^n\left[1 - n\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + n\left(\frac{n+1}{2!}\right)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \ldots\right]$ *எனக் காட்டுக.*

தீர்வு : $y = \frac{1-x}{1+x}$ *என்க.*

$$\text{R.H.S} = 2^n\left[1 - ny + \frac{n(n+1)}{2!}\,y^2 + \ldots\right] = 2^n\,[1 + y]^{-n}$$

$$= 2^n\left[1 + \frac{1-x}{1+x}\right]^{-n} = 2^n\left[\frac{1+x+1-x}{1+x}\right]^{-n}$$

$$= 2^n\left[\frac{2}{1+x}\right]^{-n} = 2^n\left[\frac{1+x}{2}\right]^n = (1+x)^n = \text{L.H.S.}$$

ஈருறுப்புத் தொடரைப் பயன்படுத்தி தோராய மதிப்பு காணல்

எ.கா. 4.14: $\sqrt[3]{126}$ *-ன் மதிப்பை* 2 *தசமத்தானங்களுக்கு திருத்தமாகக் காண்க*

தீர்வு :

$$\sqrt[3]{126} = (126)^{\frac{1}{3}} = (125 + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[125\left(1 + \frac{1}{125}\right)\right]^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{125} + \ldots\right] \qquad \because \frac{1}{125} < 1$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{3}(0.008)\right]$$

மற்ற உறுப்புகள் விலக்கப்பட்டுவிட்டன.

$= 5[1 + 0.002666]$

$= 5.01$ (2 *தசமத்தானங்கள் திருத்தமாக*)

எ.கா. 4.15: x *என்பது ஒரு மிகப்பெரிய மிகை எண்*

$\sqrt[3]{x^3 + 6} - \sqrt[3]{x^3 + 3} = \frac{1}{x^2}$ (*தோராயமாக*) *எனக் காட்டுக.*

தீர்வு : x *பெரியது எனில்* $\frac{1}{x}$ *சிறியது ஆகும். எனவே* $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$

$$\sqrt[3]{x^3+6} - \sqrt[3]{x^3+3} = (x^3+6)^{\frac{1}{3}} - (x^3+3)^{\frac{1}{3}} = x\left(1+\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{x^3}+\ldots\right] - x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^3}+\ldots\right]$$

$$= \left[x+\frac{2}{x^2}+\ldots\right] - \left[x+\frac{1}{x^2}+\ldots\right] = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{x^2} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

எ.கா. 4.16: $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ என்ற விரிவாக்கத்தில் x^8-ன் குணகத்தைக் காண்க

தீர்வு :

$$(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}x^r+\ldots$$

என நமக்குத் தெரியும்.

பொது உறுப்பு $T_{r+1} = \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}\,x^r$

$n = \frac{1}{2}$ மற்றும் x-க்கு பதிலாக $2x$ஐ எடுத்துக் கொண்டால்

$$T_{r+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}(2x)^r = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{r!\;2^r}\,2^r\,x^r$$

$\therefore x^r$ன் குணகம் $= \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{r!}$

$r = 8$ என பிரதியிட

$\therefore x^8$ன் குணகம் $= \frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{8!}$

4.6.2. படிக்குறித் தொடர் (அடுக்குத் தொடர், Exponential Series)

படிக்குறித் தேற்றம் (நிரூபணம் இல்லாமல்)

xன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும்

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\right)^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

ஆனால் $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

எனவே xன் எல்லா மெய்மதிப்புகளுக்கும் $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\frac{e + e^{-1}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$\frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

4.6.3 *மடக்கைத் தொடர்* (Logarithmic series) :

$-1 < x < 1$ எனில் $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ ஆகும். இத்தொடரானது மடக்கைத் தொடர் என்று அழைக்கப்படும்.

மடக்கைத் தொடரின் மற்ற அமைப்புகள் பின்வருமாறு :

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

$$\log(1 + x) - \log(1 - x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{1 + x}{1 - x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

பயிற்சி 4.3

(1) கீழ்க்காணும் விரிவாக்கங்களில் முதல் நான்கு உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) $\frac{1}{(2 + x)^4}$ இங்கு $|x| > 2$ (ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{6 - 3x}}$ இங்கு $|x| < 2$

(2) கீழ்க்காண்பவைகளை மதிப்பிடுக :

(i) $\sqrt[3]{1003}$ ஐ 2 தசமத்தானங்கள் சுத்தமாக

(ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ ஐ 2 தசமத்தானங்கள் சுத்தமாக

(3) x மிகச் சிறியது எனில்

$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ (தோராயமாக) என நிரூபிக்க.

(4) x மிகப்பெரியது எனில் $\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2+9} = \frac{8}{x}$ தோராயமாக என நிரூபிக்க.

(5) $(1-2x^3)^{\frac{11}{2}}$ -ன் விரிவாக்கத்தில் 5-வது உறுப்பு காண்க.

(6) $(1-x)^{-4}$ ன் விரிவாக்கத்தில் $(r+1)$வது உறுப்பு காண்க.

(7) $x^n = 1 + n\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + \ldots$ எனக் காட்டுக.

5. பகுமுறை வடிவியல்
(Analytical Geometry)

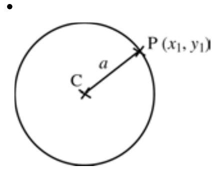
அறிமுகம்

வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், கோடுகள், வளைவுகள், வளைதளப் பரப்புகள் போன்றவைகளையும் அவைகளின் பண்புகளையும் பற்றிய படிப்பாகும். அடிப்படை கொள்கைகளால் வடிவியல் உருவானது என்று கி.மு. 300*ல் வடிவியலுக்கு அடித்தளம் இட்டவர் புகழ்பெற்ற கிரேக்க கணிதமேதை யூகிளிட் அவர்கள். கி.பி.,* 17*ஆம் நூற்றாண்டில் இயற்கணித முறைகளை வடிவியல்' படிப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டதன் விளைவாக 'பகுமுறை வடிவியல் உருவானது. புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சு தத்துவ மேதையும் கணிதமேதையுமான ரெனி டெகார்டே* (Rene Descartes) (1596 – 1650) *இயற்கணித முறைகளை வடிவியல் படிப்பில் எவ்வாறு பயன்படுத்த முடியும் என்பதை விளக்கினார். இதனால் அவர் பகுமுறை வடிவியலை தோற்றுவித்தவர் எனக் கருதப்படுகிறார். அவருடைய பெயரின் லத்தீன் வடிவமான கார்டீசியன் என்பதிலிருந்து இது 'கார்டீசியன் வடிவியல்' எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.*

இயற்கணிதத்திற்கும் வடிவ கணிதத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் கொணர இயற்கணிதத்தின் அடிப்படையான "எண்"ணை வடிவகணிதத்தின் முக்கிய கருத்தான "புள்ளி"க்கு டெகார்ட்டே அறிமுகம் செய்தார். இந்த தொடர்பானது "ஆயத் தொலைகளின் தொகுப்பு" என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் அவர் ஒரு புள்ளியின் இருப்பிடத்தை நிலையான நேர்க்கோடுகளிலிருந்து அப்புள்ளிக்குள்ள தூரத்தையும், திசையையும் கொண்டு தொடர்புபடுத்தினார். இந்த அத்தியாயத்தில், சென்ற வகுப்புகளில் மாணவர்கள் கற்ற பகுமுறை வடிவியல் கருத்துகளின் தொடர்ச்சியைக் காண்போம்.

5.1 நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை (Locus) :

வரையறை : *ஒரு புள்ளியின் இயக்கமானது சில குறிப்பிட்ட வடிவ கணித நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யுமாறு அமைந்திருக்குமானால், அப்புள்ளி நகர்ந்து செல்லும் பாதை அதன் இயங்குவரை அல்லது நியமப்பாதை எனப்படும்.*



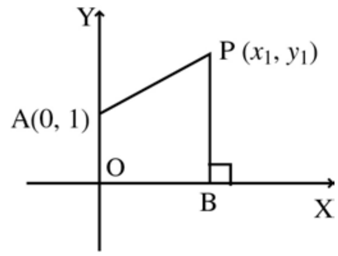
படம் 5. 1

எடுத்துக்காட்டாக, C (h, k) *என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும்* 'a' *என்ற நிலையான தூரத்திலிருக்குமாறு* P(x_1, y_1) *என்ற ஒரு புள்ளி இயங்குமாயின் அப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமாகும்.* (*படம்* 5.1) *நிலைத்த புள்ளி* 'C' *வட்டத்தின் மையம், நிலையான தூரம்* 'a' *அவ்வட்டத்தின் ஆரமாகும்.*

எ.கா. 5.1: (0, 1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரமானது x-ஆயத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்தைப்போல் இரு மடங்கு ஆனால், அப்புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

தீர்வு :

A(0, 1) என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி. தேவையான இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $P(x_1, y_1)$ என எடுத்துக் கொள்வோம். $P(x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து x-அச்சிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி B என்க. எனவே $PB = y_1$.



படம் 5. 2

கட்டுப்பாடு PA = 2PB

$$\therefore \ PA^2 = 4PB^2$$

i.e. $(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 1)^2 = 4y_1^2$

i.e. $x_1^2 + y_1^2 - 2y_1 + 1 = 4y_1^2$

i.e. $x_1^2 - 3y_1^2 - 2y_1 + 1 = 0$

எனவே (x_1, y_1)ன் இயங்குவரை $x^2 - 3y^2 - 2y + 1 = 0$

எ.கா.5.2: (– 1, 1), (4, – 2) புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை A(– 1, 1), B(4, – 2) என எடுத்துக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாட்டிற்கிணங்க நகரும் புள்ளி $P(x_1,y_1)$ எனக் கொள்வோம். கணக்கின்படி, PA = PB

$$\therefore \ PA^2 = PB^2$$

i.e. $(x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = (x_1 - 4)^2 + (y_1 + 2)^2$

i.e. $x_1^2 + 2x_1 + 1 + y_1^2 - 2y_1 + 1 = x_1^2 - 8x_1 + 16 + y_1^2 + 4y_1 + 4$

i.e. $10x_1 - 6y_1 - 18 = 0$ i.e. $5x_1 - 3y_1 - 9 = 0$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவரை $5x - 3y - 9 = 0$

எ.கா.5.3: A(– 2, 3), B(4, – 5) என்பன இரு புள்ளிகள். $PA^2 - PB^2 = 20$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு இணங்க, நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு யாது?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் A(– 2, 3), B(4, – 5). $P(x_1, y_1)$ இயங்குவரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடு, $PA^2 - PB^2 = 20$.

$$(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 3)^2 - \left[(x_1 - 4)^2 + (y_1 + 5)^2\right] = 20$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + y_1^2 - 6y_1 + 9 - [x_1^2 - 8x_1 + 16 + y_1^2 + 10y_1 + 25] = 20$$

$$12x_1 - 16y_1 - 48 = 0$$

$$\text{i.e.} \quad 3x_1 - 4y_1 - 12 = 0$$

எனவே (x_1, y_1)ன் இயங்குவரை $3x - 4y - 12 = 0$

எ.கா. 5.4: (7, –6) மற்றும் (3, 4) என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்தில் அமைந்த x-அச்சின் மீதமைந்த ஒரு புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான புள்ளி $P(x_1, y_1)$ என்க. x-அச்சின் மேல் P உள்ளதால், $y_1 = 0$. கணக்கின்படி A(7, – 6), B(3, 4) ஆகிய இரு புள்ளிகளும் P என்ற புள்ளிக்கு சமதூரத்தில் உள்ளவை.

$$\text{i.e.} \quad PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 - 7)^2 + (0 + 6)^2 = (x_1 - 3)^2 + (0 - 4)^2$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 - 14x_1 + 49 + 36 = x_1^2 - 6x_1 + 9 + 16$$

$$\Rightarrow \quad 8x_1 = 60 \quad \therefore \; x_1 = 15/2$$

எனவே தேவையான புள்ளி $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.1

(1) (1, – 4) என்ற புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் 6 அலகு தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு காண்க.

(2) (1, 4), (– 2, 3) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

(3) $7x - 4y + 1 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் $P(5t - 4, t + 1)$ என்ற புள்ளியிருந்தால்

(i) tன் மதிப்பு காண்க. (ii) Pயின் கூறுகளைக் காண்க.

(4) ஆதியிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு அதன் y-அச்சுத் தொலைவைப்போல் ஐந்து மடங்கெனில் அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

(5) (1, 2), (0, – 1) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து உள்ள தொலைவுகள் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரை $3x^2 + 3y^2 + 2x + 12y - 1 = 0$ எனக் காட்டுக.

(6) P என்ற புள்ளியானது, P மற்றும் (2, 3), (1, 5) என்ற புள்ளிகள் யாவும் எப்பொழுதும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருக்குமாறு நகர்ந்தால் Pயின் இயங்குவரை $2x + y - 7 = 0$ எனக் காட்டுக.

(7) A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் (1, 0) மற்றும் (– 2, 3). கீழ்க்கண்ட கட்டுப்பாட்டுக்கு இணங்க நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

(i) $PA^2 + PB^2 = 10$ (ii) PA = 4PB.

5.2 நேர்க்கோடுகள் (Straight lines) :

5.2.1 அறிமுகம் :

ஒரு நேர்க்கோடு என்பது வடிவியலில் வளைவரையின் எளிமையான வடிவம் ஆகும். ஒவ்வொரு நேர்க்கோட்டிற்கும் ஒரு சமன்பாடு உண்டு. ஒரு நேர்க்கோட்டை நிர்ணயிக்க இரண்டு நிபந்தனைகள் தேவை. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை முந்தைய வகுப்புகளில் பல்வேறு வடிவங்களில் பெற்றுள்ளோம். அவைகளாவன-

(1) சாய்வு - வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Slope – intercept form) :

(அ.து.) $y = mx + c$ இதில் 'm' என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வையும் 'c' என்பது y-வெட்டுத்துண்டையும் குறிக்கும்.

(2) புள்ளி - சாய்வு வடிவம் (Point – slope form) :

(அ.து.) $y - y_1 = m(x - x_1)$ இதில் 'm' என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வு. (x_1, y_1) என்பது நேர்க்கோட்டின் மீது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி.

(3) இரு புள்ளி வடிவம் (Two point form) :

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ இதில் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்பன நேர்க்கோட்டின் மீது கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள்.

(4) வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (intercept form) :

(அ.து.) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ இதில் 'a', 'b' என்பன முறையே x மற்றும் y அச்சின் வெட்டுத்துண்டுகள்.

5.2.2 செங்குத்து வடிவம் (Normal form) :

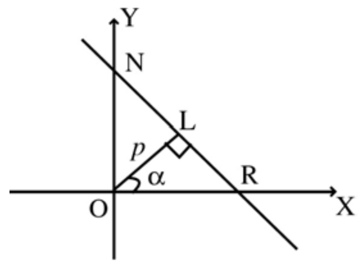
ஆதியிலிருந்து ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமும், அச்செங்குத்துக்கோடு x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணமும் கொடுக்கப்படின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

ஒரு நேர்க்கோடு x, y அச்சுகளை முறையே R, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்க.

RNக்கு OL என்ற செங்குத்துக்கோடு ஒன்று வரைக.

OL = p. மேலும் $\angle XOL = \alpha$ என்க.

x, y அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே OR, ONஆகும்.



படம் 5. 3

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{OR} + \frac{y}{ON} = 1$ …(1)

செங்கோண முக்கோணம் OLRல், $\sec\alpha = \frac{OR}{OL}$ $\therefore$ OR = $p\sec\alpha$

செங்கோண முக்கோணம் OLNல் $\operatorname{cosec}\alpha = \sec(90 - \alpha) = \frac{ON}{OL}$

$\therefore$ ON = $p\operatorname{cosec}\alpha$

சமன்பாடு (1)ல் OR, ON மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்

$$\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1 \quad \text{(அ.து.)} \quad \frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1$$

(அ.து.) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ என்பது தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.

5.2.3 துணையலகு வடிவம் (Parametric form) :

வரையறை : x மற்றும் y என்கிற இருமாறிகள், மூன்றாவது மாறி ‘θ’ன் சார்புகளாயின், θ-ன் வாயிலாக எழுதப்படும் x மற்றும் y-க்குரிய சார்புகள் x, y-க்குரிய துணை அலகு வடிவங்களாகும். இங்கு θ என்ற மாறியானது சார்பின் துணை அலகு ஆகும்.

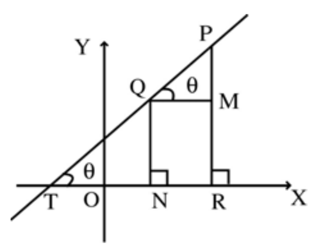
(x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழியாகவும், x-அச்சுடன் θ கோணத்தை ஏற்படுத்தக்கூடியதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணல். [துணையலகு வடிவம்]

Q (x_1, y_1) என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி மற்றும் P(x, y) என்பது நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. PQ = r என்க.

$\angle PTR = \theta$ என்க,

ஆனால் $\angle PQM = \angle PTR$

$\therefore \angle PQM = \theta$



படம் 5. 4

செங்கோண முக்கோணம் PQMல்

$$\cos\theta = \frac{QM}{PQ} = \frac{NR}{r} = \frac{OR - ON}{r} = \frac{x - x_1}{r}$$

$$\therefore \frac{x - x_1}{\cos\theta} = r \qquad \ldots (1)$$

இதேபோல் $\sin\theta = \frac{PM}{PQ} = \frac{PR - MR}{r} = \frac{y - y_1}{r}$

$$\therefore \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad \ldots (2)$$

(1),(2) $\Rightarrow \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ என்பது தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

நேர்க்கோட்டின் எந்த ஒரு புள்ளியையும் $(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$ எனத் துணையலகு வாயிலாக எழுதலாம். இதில் r என்பது இயற்கணிதத் தூரமாகும். இங்கு r ஒரு துணை அலகாகும்.

5.2.4 பொது வடிவம் (General form) :

$ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாடு எப்பொழுதும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$ax + by + c = 0$ எனும் சமன்பாடு குறிக்கும் நியமப்பாதையில் ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ என்க. பின்னர்,

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 \qquad \ldots (3)$$

$(1) \times (y_2 - y_3) + (2) \times (y_3 - y_1) + (3) \times (y_1 - y_2) \Rightarrow$

$a\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] = 0$

$\because a \neq 0, \quad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

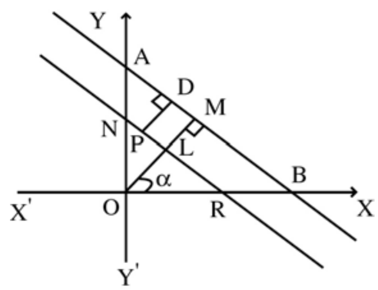
அதாவது $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ மற்றும் (x_3, y_3) ஒரு கோட்டுப்புள்ளிகள். எனவே $ax + by + c = 0$ ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

5.2.5 ஒரு புள்ளியிலிருந்து நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் :

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் $\left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

$ax + by + c = 0$ … (1) எனும் சமன்பாடு AB என்ற நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கட்டும்.

$P(x_1, y_1)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி ABக்கு PD செங்குத்து வரைக. PD தான் தேவையான தூரம். PD க்கு இணையாக O வழியாக OM வரைக. OM=p என்க. மேலும் $\underline{|\text{MOB}}$ = α. என்க.



படம் 5. 5

AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (5.2.2ன் படி)

$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ … (2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)-ம் ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கின்றன. எனவே ஒத்த குணகங்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும்.

$$\therefore \frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{-p}{c}$$

$$\cos\alpha = -\frac{ap}{c}, \quad \sin\alpha = -\frac{pb}{c}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ என்பதை அறிவோம்

$$\frac{p^2b^2}{c^2} + \frac{p^2a^2}{c^2} = 1 \quad \text{i.e.} \quad p^2a^2 + p^2b^2 = c^2$$

$$p^2(a^2 + b^2) = c^2 \quad \text{i.e.} \quad p^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

$$p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

எனவே $\cos\alpha = \mp\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \mp\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

OL = p' என்று எடுத்துக்கொண்டால் நேர்க்கோடு NRன் சமன்பாடு

$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = 0$

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி NR என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் அமைவதால்

$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p' = 0$

(அ.து.) $OL = p' = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$

படத்தின்படி, தேவையான தூரம்

$$PD = LM = OM - OL = p - p'$$
$$= p - x_1 \cos\alpha - y_1 \sin \alpha$$
$$= \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \frac{x_1 \,.\, a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm \frac{y_1 \,.\, b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

எனவே $(x_1,\ y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் = $\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

கிளைத்தேற்றம் :

ஆதியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ எனும் நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் = $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

குறிப்பு : நேர்க்கோட்டின் பொதுச் சமன்பாடு $ax+by+c = 0$ i.e. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$

இது $y = mx + c$ போல் உள்ளது

$\therefore\ m = -\frac{a}{b}$ (அ.து.) சாய்வு $= -\frac{x\text{ன் குணகம்}}{y\text{ன் குணகம்}}$

எ.கா.5.5: *சாய்வு 2 மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு 7 உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.*

தீர்வு :

சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு வடிவம் $y = mx + c$ இங்கு $m = 2$, $c = 7$

எனவே தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 2x + 7$

எ.கா. 5.6: *$(-1, 2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $\frac{2}{7}$ எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.*

தீர்வு :

புள்ளி - சாய்வு வடிவம் $y - y_1 = m(x - x_1)$.

இங்கு $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ மேலும் $m = \frac{2}{7}$

$$\therefore\ y - 2 = \frac{2}{7}(x + 1) \text{ (அ.து.) } 7y - 14 = 2x + 2$$

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $2x - 7y + 16 = 0$

எ.கா. 5.7:

$(1, 2), (3, -4)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ இங்கு $(x_1, y_1) = (1, 2)$ மேலும் $(x_2, y_2) = (3, -4)$

தேவையான நேர்க்கோடு.

$$\frac{y-2}{2+4} = \frac{x-1}{1-3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-2}{6} = \frac{x-1}{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{-1}$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -3x + 3$$

நேர்க்கோட்டின் தேவையான சமன்பாடு $3x + y = 5$

எ.கா. 5.8: $(1, 2)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்வதும் அச்சுக்களின் மேல் வெட்டுத்துண்டுகளை 2:3 என்ற விகிதத்தில் ஏற்படுத்தும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

நேர்க்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவம் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots (1)$

வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் $2 : 3$. $\therefore a = 2k,\ b = 3k$.

(1)ல் பிரதியிட, $\frac{x}{2k} + \frac{y}{3k} = 1$ (அ.து.) $3x + 2y = 6k$

$(1, 2)$ புள்ளி வழி செல்வதால், $3 + 4 = 6k$ (அ.து.) $6k = 7$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $3x + 2y = 7$

எ.கா. 5.9: $(2, -3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $2x - y + 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் = $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.

ஆகையால் $(2, -3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $2x - y + 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $\left|\frac{2(2) - (-3) + 9}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{5}}$ அலகுகள்.

எ.கா. 5.10: $4x-3y+20=0$ என்ற கோட்டிற்கு 5 அலகுகள் தொலைவிலுள்ள $y = x + 1$ என்ற கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளியின் கூறுகளைக் காண்க.

தீர்வு : (x_1, y_1) என்ற புள்ளி $y = x + 1$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ளது என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ y_1 = x_1 + 1 \qquad \ldots (1)$$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $4x - 3y + 20 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம்

$$\left|\frac{4x_1 - 3y_1 + 20}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \pm\left(\frac{4x_1 - 3y_1 + 20}{5}\right)$$

ஆனால் செங்குத்தின் நீளம் 5 அலகுகள் எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ \pm\left(\frac{4x_1 - 3y_1 + 20}{5}\right) = 5$$

$$\therefore\ 4x_1 - 3y_1 + 20 = \pm 25$$

மிகைக்குறியை எடுத்தால், $4x_1 - 3y_1 + 20 = 25$

$\Rightarrow$ $4x_1 - 3y_1 = 5 \qquad \ldots (2)$

குறைக்குறியை எடுத்தால், $4x_1 - 3y_1 + 20 = -25$

$\Rightarrow$ $4x_1 - 3y_1 = -45 \qquad \ldots (3)$

(1), (2)ன் தீர்வு $x_1 = 8,\ \ y_1 = 9$

(1), (3)ன் தீர்வு $x_1 = -42,\ \ y_1 = -41.$

$\therefore$ எனவே தேவையான கூறுகள் $(8, 9), (-42, -41)$.

எ.கா.5.11: ஒரே நேர்க்கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் 6 அலகுகள். அச்செங்குத்துக்கோடு x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் $120°$ எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

நேர்க்கோட்டின் செங்குத்து வடிவம் $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$

இங்கு $\alpha = 120°$, $p = 6$ $\quad \therefore x \cos 120° + y \sin 120° = 6$

$$\Rightarrow \quad x\left(-\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 \Rightarrow -x + \sqrt{3}\,y = 12$$

$$\Rightarrow \quad x - \sqrt{3}\,y + 12 = 0$$

$\therefore$ நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x - \sqrt{3}\,y + 12 = 0$

எ.கா.5.12: $4x - 3y - 12 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு 3 அலகுகள் செங்குத்து தூரத்தில் y-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

தரப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாட்டிற்கிணங்க y-அச்சின் மீது அமைந்த புள்ளியை $P(0, y_1)$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு $4x - 3y - 12 = 0$

P என்ற புள்ளியிலிருந்து $4x - 3y - 12 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $\left|\dfrac{-3y_1 - 12}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\dfrac{3y_1 + 12}{5}\right|$

செங்குத்து தூரம் 3 அலகுகள் எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்,

$$\left|\frac{3y_1 + 12}{5}\right| = 3 \quad \Rightarrow \quad 3y_1 + 12 = \pm 15$$

$$3y_1 + 12 = 15 \quad (அ) \quad 3y_1 + 12 = -15$$

$$3y_1 = 3 \quad (அ) \quad 3y_1 = -27$$

$$y_1 = 1 \quad (அ) \quad y_1 = -9$$

(0, 1) மற்றும் (0, – 9) தேவையான புள்ளிகள்.

பயிற்சி 5.2

(1) (– 1, – 2) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $\frac{4}{7}$ எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) சாய்வு 3 மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு 4 உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) (3, – 3) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதும் x-அச்சுடன் 45° கோணத்தை ஏற்படுவதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(4) (3, 6) ,(2, – 5) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(5) வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 9 உடையதும் (2, 2) புள்ளியின் வழியாகச் செல்வதும் ஆன நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(6) (– 1, 3) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு y-வெட்டுத்துண்டைப் போல மூன்று மடங்கு எனில் அந்நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) (2, 4), (4, 6), (–6, –10) ஆகிய புள்ளிகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(8) (3, 2) என்ற புள்ளியிலிருந்து $3x + 2y + 1= 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(9) ஒரு நேர்க்கோட்டின் அச்சுகளுக்கிடையே உள்ள பகுதியை (–3, 2) என்ற புள்ளி இருசமக்கூறிடும் எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(10) (1, 2), (–2, –1), (3, 6) மற்றும் (6, 8) ஆகியவை நாற்கரத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் எனில், அதன் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(11) அச்சுகளின் மேல் உள்ள வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் முறையே 1, –6 எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(12) $7x + 3y - 6 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு அச்சுகளோடு ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.

(13) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு 4 அலகுகள் செங்குத்துத் தூரத்திலும் x-அச்சின் மீதும் உள்ள புள்ளியைக் காண்க.

(14) (4, 1) என்ற புள்ளி வழியே x-அச்சுடன் 135° உண்டாக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கும் $4x - y = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

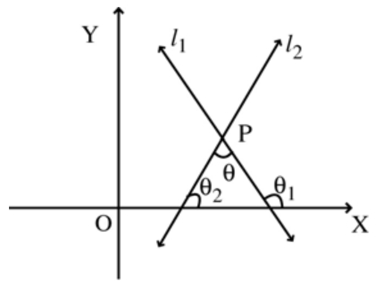
5.3 நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு **(Family of straight lines) :**

இதற்கு முந்தைய அத்தியாயத்தில், ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பற்றி படித்தோம். இந்த அத்தியாயத்தில் ஒரு தளத்தில் அமைந்த ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்க்கோடுகளைப் பற்றி பார்க்கலாம்.

5.3.1 இருகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் :

$l_1 : y = m_1 x + c_1$ மற்றும்

$l_2 : y = m_2 x + c_2$ என்பன P என்ற புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்க. இவை *x*-அச்சின் மிகை திசையில் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே θ_1 மற்றும் θ_2 என்க. இவ்வாறாயின். $m_1 = \tan\theta_1$ மற்றும்



படம் 5. 6

$m_2 = \tan\theta_2$. இரு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ என்க.

படம் (5.6)ன்படி $\theta_1 = \theta + \theta_2$

$$\therefore \theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 . \tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ மதிப்பு குறை எண்ணாகவோ அல்லது மிகை எண்ணாகவோ இருக்கும். வழக்கமான மரபுப்படி நாம் இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் குறுங்கோணமாகக் கொள்வோம். எனவே நாம் tanθ விற்கு மிகை மதிப்பை (தனி மதிப்பை) எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$; $\therefore \theta = \tan^{-1}\left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

கிளைத்தேற்றம் (1) : இரு நேர்க்கோடுகள் இணையானால், அவற்றின் சாய்வுகள் சமமாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

இரு நேர்க்கோடுகள் இணையானால், அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் பூச்சியம். $\theta = 0$. $\therefore \tan\theta = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0 \quad \Rightarrow m_1 - m_2 = 0$$

(அ.து.) $m_1 = m_2$

எனவே இரு நேர்க்கோடுகள் இணையானால், அவற்றின் சாய்வுகள் சமமாக இருக்கும்.

குறிப்பு : மறுதலையாக, சாய்வுகள் சமமெனில் இருநேர்க்கோடுகளும் இணையாக இருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் (2): இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்து எனில், அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலனின் மதிப்பு -1 ஆகும்.

நிரூபணம் :

இரு நேர்க்கோடுகளும் செங்குத்தானால், $\theta = 90°$.

$$\therefore \ \tan\theta = \tan 90° = \infty \quad \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \infty$$

பகுதி பூச்சியமாக இருந்தால்தான் இது சாத்தியம். அதனால்

$$1 + m_1 m_2 = 0 \qquad \text{(அ.து.)} \quad m_1 m_2 = -1$$

எனவே இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்து எனில், அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $= -1$.

குறிப்பு (1) : மறுதலையாக, சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $= -1$ எனில் இரு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

(2) : m_1, m_2 இரண்டும் முடிவானவையாக இருந்தால்தான் கிளைத்தேற்றம் (2) பொருந்தும். நேர்க்கோடுகள் அச்சுக்களாகவோ அல்லது அச்சுக்களுக்கு இணையாகவோ இருந்தால் இது பொருந்தாது.

கிளைத்தேற்றம் (3): நேர்க்கோடுகள் இணையாக இருந்தால், அந்த நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளில் உள்ள x, yன் குணகங்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும். குறிப்பாக இரு இணை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் மாறிலி உறுப்புகளால் மட்டுமே வேறுபடும்.

நிரூபணம் :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ எனும் இருகோடுகள் இணையானவை என்க. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$

இரு கோடுகளும் இணையானவை ; $m_1 = m_2$.

$$\text{(அ.து.)} \quad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

(அ.து.) x, yன் குணகங்கள் சம விகிதத்தில் இருக்கும்.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda \ \text{(என்க)}$$

$$\therefore \ a_2 = a_1\lambda, \quad b_2 = b_1\lambda$$

எனவே இரண்டாவது சமன்பாடு $a_2x + b_2y + c_2 = 0$வை

$\lambda a_1x + \lambda b_1y + c_2 = 0$ என எழுதலாம்.

(அ.து.) $a_1x + b_1y + \frac{c_2}{\lambda} = 0$

(அ.து.) $a_1x + b_1y + k = 0$ (இங்கு $k = \frac{c_2}{\lambda}$)

எனவே $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ எனும் கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $a_1x + b_1y + k = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு (1): இதற்கு முந்தைய அத்தியாயத்தில் ஆதிக்கும் ஒரு நேர்க்கோடு $ax + by + c = 0$-க்கும் இடைப்பட்ட தூரம் காண்பதற்கு உரிய ஒரு சூத்திரத்தைப் பார்த்தோம். (அ.து.) தூரம் $= \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

இதைப் பயன்படுத்தி $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ என்ற இரு இணைகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய சூத்திரமாக $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என்பதைத் தருவிக்கலாம். நாம் $| c_1 - c_2 |$ எடுப்பதன் காரணம் $c_2 > c_1$ ஆகவோ அல்லது $c_1 > c_2$ ஆகவோ இருக்கலாம் என்பதே.

குறிப்பு (2): இரு இணையான கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு முன்னால் அந்த இரு கோடுகளையும் $ax + by + c_1 = 0$ மற்றும் $ax + by + c_2 = 0$ என்ற திட்ட வடிவத்தில் எழுதி பிறகு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்.

கிளைத்தேற்றம் (4): $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டின் வடிவம் ஏதேனும் ஒரு k-ன் மதிப்புக்கு $bx - ay + k = 0$ ஆகும்.

நிரூபணம் : $ax + by + c = 0$ மற்றும் $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்க.

$ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_1 = -\frac{a}{b}$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_2 = -\frac{a_1}{b_1}$

இரு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் $m_1 m_2 = -1$

(அ.து.) $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ (அ.து.) $aa_1 = -bb_1$

(அ.து.) $\frac{a_1}{b} = -\frac{b_1}{a} = \lambda$ என்க. $\therefore a_1 = b\lambda, b_1 = -a\lambda$

இரண்டாவது சமன்பாடு $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ஐ $b\lambda x - a\lambda y + c_1 = 0$ என எழுதலாம்.

(அ.து.) $$bx - ay + \frac{c_1}{\lambda} = 0$$

(அ.து.) $$bx - ay + k = 0 \quad \text{இங்கு } k = \frac{c_1}{\lambda}$$

எனவே $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டின் வடிவம் ஏதேனும் ஒரு k-ன் மதிப்புக்கு $bx - ay + k = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு : இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்க, அவற்றின் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

5.3.3 மூன்று நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழியே செல்வதற்கான கட்டுப்பாட்டைக் காணல் :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \ldots (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \quad \ldots (3)$$

என்பன மூன்று நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்க. மூன்று நேர்க்கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் சந்தித்தால், ஏதேனும் இரண்டு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாக மூன்றாவது நேர்க்கோடு செல்ல வேண்டும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளைத் தீர்வு செய்வதால் கிடைக்கும் முதல் இரண்டு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளாவன

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2 a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

இந்த x, y ன் மதிப்புகளை சமன்பாடு (3)ல் பிரதியிட்டால்,

(அ.து.) $$a_3\left(\frac{b_1 c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2 - c_2 a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

(அ.து.) $$a_3 (b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

(அ.து.) $$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

(அ.து.) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே மூன்று நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியேச் செல்வதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

5.3.4 இரு தரப்பட்ட நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காணல் :

கொடுக்கப்பட்ட இருநேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$ என்க.

$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0\ldots \quad (3)$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு λ ஒரு மாறிலி.

சமன்பாடு (3) ஆனது x, yல் ஒரு படிச்சமன்பாடாக இருப்பதால், இதுவும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும். (1), (2) சமன்பாடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) என்க.

$\therefore\ a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$

$\therefore\ a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 + \lambda\,(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0$

புள்ளி (x_1, y_1) ஆனது சமன்பாடு (3)ஐயும் நிறைவு செய்கிறது.

எனவே $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_1x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் நேர்க்கோடாகும்.

எ.கா. 5.13 : $3x - 2y + 9 = 0$, $2x + y - 9 = 0$ ஆகிய இரு நேர்க்கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்.

தீர்வு :

$3x - 2y + 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_1 = \frac{3}{2}$ $\left[\because y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right]$

$2x + y - 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_2 = -2$ $[\because y = -2x + 9]$

இரு நேர்க்கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ‘θ’ எனில்,

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{3}{2} + 2}{1 + \frac{3}{2}(-2)}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2-6}{2}}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left|-\frac{7}{4}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$$

எ.கா.5.14 : $2x + y - 9 = 0$ மற்றும் $2x + y - 10 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் இணையானவை எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$2x + y - 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_1 = -2$;

$2x + y - 10 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_2 = -2$; $\therefore m_1 = m_2$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகளும் இணையானவை.

எ.கா.5.15: $x+2y+5=0$, $2x+ 4y - 5 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் இணையானவை எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட இரு சமன்பாடுகள்

$$x + 2y + 5 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$2x + 4y - 5 = 0 \quad \ldots (2)$$

x, yன் குணகங்கள் சமவிகிதத்தில் உள்ளன. காரணம் $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. எனவே இரு நேர்க்கோடுகளும் இணையாகும்.

குறிப்பு : சமன்பாடு(2)ஐ $x + 2y - 5/2 = 0$ என எழுதுவதன் மூலம் இரு சமன்பாடுகளும் மாறிலி உறுப்பில் வேறுபடுவதால் அவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் இணையானவையாகும்.

எ.கா. 5.16: $2x + 3y - 6 = 0$ மற்றும் $2x + 3y + 7 = 0$ என்ற இரு இணை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் காண்க.

தீர்வு :

இரு இணை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் = $\left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ ஆகும். இங்கு $c_1 = -6$, $c_2 = 7$, $a = 2$, $b = 3$

எனவே தேவையான தூரம் $\left|\frac{-6-7}{\sqrt{2^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-13}{\sqrt{13}}\right| = \sqrt{13}$ அலகுகள்

எ.கா. 5.17: $2x + 3y - 9 = 0$, $3x - 2y + 10 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக.

தீர்வு :

$2x + 3y - 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_1 = -\frac{2}{3}$

$3x - 2y + 10 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_2 = \frac{3}{2}$

$$\therefore \; m_1 m_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

எ.கா.5.18: $3x + 2y = 9$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் $(3, -3)$ என்ற புள்ளிவழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$3x + 2y - 9 = 0$ இணையான ஒரு நேர்க்கோட்டின் வடிவம்

$$3x + 2y + k = 0 \qquad \ldots (1)$$

இக்கோடு $(3, -3)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்

$9 - 6 + k = 0$ *(அ.து.)* $k = -3$

$\therefore$ $3x + 2y - 3 = 0$ என்பது தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா.5. 19: $3x + 4y + 28 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் $(-1, 4)$ என்ற புள்ளிவழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$3x + 4y + 28 = 0$க்கு செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் வடிவம் $4x - 3y + k = 0$

இக்கோடு $(-1, 4)$ன் வழியாகச் செல்வதால் $-4 - 12 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = 16$

எனவே தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $4x - 3y + 16 = 0$

எ.கா. 5. 20: $4x - 3y - 18 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$ மற்றும் $x + y - 2 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகளை பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணம் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$4x - 3y - 18 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_1 = \frac{4}{3}$

$3x - 4y + 16 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_2 = \frac{3}{4}$

$x + y - 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m_3 = -1$

$4x - 3y - 18 = 0$ மற்றும் $3x - 4y + 16 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'α' என்க.

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால்

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\,\frac{3}{4}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{16-9}{12}}{2}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{7}{24}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$$

$3x–4y+16 = 0$ *மற்றும்* $x + y – 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'β' என்க.

$$\therefore\ \beta = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{3}{4}+1}{1+\frac{3}{4}(-1)}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{7/4}{1/4}\right|$$

$$= \tan^{-1}(7)$$

$x+y –2 = 0$ *மற்றும்* $4x–3y– 18= 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'γ' என்க.

$$\therefore\ \gamma = \tan^{-1}\left|\frac{-1-\frac{4}{3}}{1+(-1)\left(\frac{4}{3}\right)}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}}\right|$$

$$= \tan^{-1}(7)$$

$$\beta = \gamma$$

எனவே தரப்பட்ட முக்கோணம் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணமாகும்.

எ.கா. 5.21 : $5x + 4y – 13 = 0$ *மற்றும்* $3x + y – 5 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு :

நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் காண, அவற்றின் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (x_1, y_1) என்க.

(x_1, y_1) ஆனது இரு நேர்க்கோடுகளின் மீதும் உள்ளதால்

$$\therefore\quad 5x_1 + 4y_1 = 13 \qquad \ldots (1)$$

$$3x_1 + y_1 = 5 \qquad \ldots (2)$$

$$(2) \times 4 \quad \Rightarrow \quad 12x_1 + 4y_1 = 20 \qquad \ldots (3)$$

$$(1) – (3) \ \Rightarrow \quad -7x_1 = -7 \quad \therefore\ x_1 = 1$$

$x_1 = 1$ என்பதை சமன்பாடு(1)ல் பிரதியிட, $5 + 4y_1 = 13$

$$4y_1 = 8 \qquad \therefore y_1 = 2$$

எனவே வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (1, 2) ஆகும்.

எ.கா.5.22 : $2x + y = 8$, $3x - y = 2$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியை (2,–3) என்ற புள்ளியுடன் இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிவழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x + y - 8 + \lambda (3x - y - 2) = 0 \qquad \ldots (1)$$

சமன்பாடு(1)ஐக் குறிக்கும் நேர்க்கோடானது (2, –3) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால் $4 - 3 - 8 + \lambda (6 + 3 - 2) = 0$

$$\therefore \lambda = 1$$

$$\therefore (1) \Rightarrow 2x + y - 8 + 3x - y - 2 = 0 \Rightarrow 5x - 10 = 0$$

$x = 2$ என்பது தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

எ.கா. 5.23: $2x + y = 8$ மற்றும் $3x - 2y + 7 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாகவும் $4x + y - 11 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு நேர்க்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (x_1, y_1) என்க.

$$2x_1 + y_1 = 8 \qquad \ldots (1)$$

$$3x_1 - 2y_1 = -7 \qquad \ldots (2)$$

$$(1) \times 2 \Rightarrow 4x_1 + 2y_1 = 16 \qquad \ldots (3)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow x_1 = \frac{9}{7} \ ; \ y_1 = \frac{38}{7} \ ; \ \therefore (x_1, y_1) = \left(\frac{9}{7}, \frac{38}{7}\right)$$

$4x + y - 11 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையான ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டின் வடிவம் $4x + y + k = 0$

இக்கோடு $\left(\frac{9}{7}, \frac{38}{7}\right)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \frac{36}{7} + \frac{38}{7} + k = 0 \ ; \ k = -\frac{74}{7}$$

$$4x + y - \frac{74}{7} = 0$$

∴ $28x+7y-74 = 0$ என்பது தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா.5.24: $5x - 6y = 1$ மற்றும் $3x + 2y + 5 = 0$ என்ற இவ்விரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிவழியாகவும், $3x - 5y + 11 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$5x - 6y - 1 + \lambda\,(3x + 2y + 5) = 0$ … (1)

$(5 + 3\lambda)x + (-6 + 2\lambda)y + (-1 + 5\lambda) = 0$

இந்த நேர்க்கோடு $3x - 5y + 11 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

செங்குத்தாக உள்ள இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 (அ.து.) $m_1\, m_2 = -1$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{5 + 3\lambda}{-6 + 2\lambda}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -1$$

$$15 + 9\lambda = -30 + 10\lambda \quad \therefore \lambda = 45$$

(1) $\Rightarrow$ $5x - 6y - 1 + 45\,(3x + 2y + 5) = 0$ i.e. $140x + 84y + 224 = 0$

(அ.து.) $5x + 3y + 8 = 0$ என்பது தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா.5.25: $3x + 4y = 13$; $2x - 7y + 1 = 0$ மற்றும் $5x - y = 14$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிரூபி.

தீர்வு :

முதல் இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில்

$$3x_1 + 4y_1 = 13 \qquad \dots (1)$$

$$2x_1 - 7y_1 = -1 \qquad \dots (2)$$

(1) × 7 $\Rightarrow$ $21x_1 + 28y_1 = 91$ … (3)

(2) × 4 $\Rightarrow$ $8x_1 - 28y_1 = -4$ … (4)

(3) + (4) $\Rightarrow$ $29x_1 = 87 \Rightarrow x_1 = 3$

(1) $\Rightarrow$ $9 + 4y_1 = 13 \Rightarrow y_1 = 1$

முதல் இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (3, 1)

இதை $5x - y = 14$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட

இ.ப. $= 5x - y$

$= 15 - 1 = 14 =$ வ.ப.

(அ.து.) (3, 1) என்ற புள்ளியானது மூன்றாவது நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் நிறைவு செய்கிறது. எனவே மூன்று நேர்க்கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் சந்திப்பனவாகும்.

எ.கா. 5.26: $x - y - 5 = 0$, $2x - y - 8 = 0$ மற்றும் $3x - y - 9 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

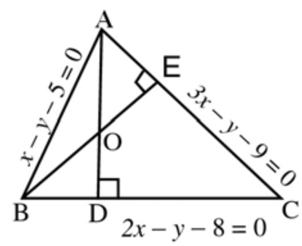
$x - y - 5 = 0$ … (1)

$2x - y - 8 = 0$ … (2)

$3x - y - 9 = 0$ … (3)

இச்சமன்பாடுகள் முறையே ΔABCயின் பக்கங்களான AB, BC மற்றும் CAஐக் குறிப்பவை என்க.

(1), (3) வெட்டும் புள்ளி A(2, – 3)



படம் 5. 7

BCன் சமன்பாடு $2x - y - 8 = 0$. இக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டின் வடிவம் $x + 2y + k = 0$ … (4)

A(2, – 3) என்ற புள்ளிவழி நேர்க்கோடு (4) செல்வதால்

$2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

எனவே AD ன் சமன்பாடு $x + 2y = -4$ … (5)

(1)ஐயும் (2)ஐயும் தீர்ப்பதால் நமக்கு B(3, – 2) என்ற வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கிறது.

$3x - y - 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாட்டின் வடிவம் $x + 3y + k = 0$

இக்கோடு B(3, – 2) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்,

$\therefore 3 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 3$

$\therefore$ எனவே BEன் சமன்பாடு $x + 3y = -3$ … (6)

சமன்பாடுகள் (5)ம், (6)ம் வெட்டும் புள்ளி O (– 6, 1). இதுவே ΔABCன் செங்கோட்டு மையமாகும்.

எ.கா.5.27: 'a'இன் எம்மதிப்பிற்கு $3x + y + 2 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + ay - 3 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் என்பதைக் காண்க.

தீர்வு :

(x_1, y_1) என்பது மூன்று நேர்க்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி என்க. முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் இந்த புள்ளி பூர்த்தி செய்கிறது.

$$\therefore \quad 3x_1 + y_1 + 2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$2x_1 - y_1 + 3 = 0 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால் நமக்கு வெட்டும் புள்ளி $(-1, 1)$ எனக் கிடைக்கிறது. மூன்று நேர்க்கோடுகளும் ஒரே புள்ளிவழியேச் செல்வதால் வெட்டும் புள்ளியை $x + ay - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\therefore \quad -1 + a - 3 = 0$$

(அ.து.) $a = 4$

பயிற்சி 5.3

(1) $2x + y = 4$ மற்றும் $x + 3y = 5$ ஆகிய இரு நேர்க்கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

(2) $2x + y = 5$, $x - 2y = 4$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக.

(3) $3x + 2y - 7 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளிவழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(4) $x + y = 9$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் $(2, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(5) $5x + 4y - 13 = 0$, $3x + y - 5 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் காண்க.

(6) $2x - 3y + 9 = 0$, $6x + ky + 4 = 0$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகள் இணை எனில், k-ன் மதிப்பு காண்க.

(7) $2x + y - 9 = 0$, $4x + 2y + 7 = 0$ என்ற இணை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

(8) $8px + (2 - 3p)\, y + 1 = 0$; $px + 8y - 7 = 0$ இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் செங்குத்தானவை எனில் pன் மதிப்பு காண்.

(9) $2x + y = 8$; $3x - 2y + 7 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும்புள்ளி வழியாகவும் $4x + y - 11 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(10) $5x-6y=1$, $3x+2y+5=0$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாகவும் $3x-5y+11=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) $2x-y+7=0$, $x+y-1=0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை $(4, -3)$ என்ற புள்ளியுடன் இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

(12) $3x+2y+1=0$, $x+y=3$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை $y-x=1$; $2x+y+2=0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியுடன் இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(13) $2x+y=0$, $9x+32y=41$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமும் $3x+2y=0$, $4x-y=0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமும் சமம் என நிரூபி.

(14) $y=2x+7$, $x-3y-6=0$ மற்றும் $x+2y=8$ ஆகிய நேர்க்கோடுகளை பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் எனக் காட்டுக.

(15) $3x+y+4=0$, $3x+4y-15=0$ மற்றும் $24x-7y-3=0$ என்ற நேர்க்கோடுகளை பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணம் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் எனக் காட்டுக.

(16) $3x+4y=13$; $2x-7y+1=0$ மற்றும் $5x-y=14$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திப்பவை எனக் காட்டுக.

(17) $x-6y+a=0$, $2x+3y+4=0$ மற்றும் $x+4y+1=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால் 'a'ன் மதிப்பென்ன?

(18) 'a'ன் எம்மதிப்பிற்கு $x+y-4=0$, $3x+2=0$ மற்றும் $x-y+3a=0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் ஒரே புள்ளி சந்திப்பவை என்பதைக் காண்க.

(19) $(-2, -1)$, $(6, -1)$, $(2, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் காண்க.

(20) $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$ மற்றும் $cx+ay+b=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிச் சென்றால் $a^3+b^3+c^3=3abc$ எனக் காட்டுக.

(21) $x+y-1=0$, $x+2y-4=0$ மற்றும் $x+3y-9=0$ என்ற நேர்க்கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் காண்க.

(22) $x + 2y = 0$, $4x + 3y = 5$ மற்றும் $3x + y = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகளை பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் காண்க.

5.4 இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines)

5.4.1 இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

x, yல் ஒருபடிச் சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது என்பதை நாம் அறிவோம். $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ என்பன இரு தனித்தனி கோடுகளின் சமன்பாடு என்க. அந்த நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(l_1x + m_1y + n_1)\,(l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

$$l_1l_2x^2 + (l_1m_2 + l_2m_1)\,xy + n_1n_2y^2 + (l_1n_2 + l_2n_1)x + (m_1n_2 + m_2n_1)y + n_1n_2 = 0$$

எனவே $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (இங்கு a, b, c, f, g, h மாறிலிகள்) என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

5.4.2 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள்

இரண்டாவது படியில் சமபடித்தான சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ஐ xஇன் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகக் கருதித் தீர்வு காண

$$x = \frac{-2hy \pm \sqrt{4h^2y^2 - 4aby^2}}{2a}$$

$$= \left[\frac{-2h \pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{2a}\right] y = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{a}\; y$$

$$\therefore \quad ax = \left(-h \pm \sqrt{h^2 - ab}\right) y$$

(அ.து.) $ax + \left(h + \sqrt{h^2 - ab}\right) y = 0$ மற்றும் $ax + \left(h - \sqrt{h^2 - ab}\right) y = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஆதிவழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளாகும்.

எனவே $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற சமபடித்தான சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பு : நேர்க்கோடுகள்

(1) $h^2 > ab$ எனில் மெய்யானவை, வெவ்வேறானவை

(2) $h^2 = ab$ எனில் மெய்யானவை. ஆனால் ஒன்றியவை.

(3) $h^2 < ab$ எனில் கற்பனையானவை.

ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் காணல்

x, y க்களில் இரண்டாவது படியில் சமபடித்தான சமன்பாடு

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும். ஆதிவழிச் செல்லும் இரு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y = m_1x$; $y = m_2x$ என்க. அவை இரண்டையும் ஒருங்கிணைத்து $(y - m_1x)(y - m_2x) = 0$ என எழுதலாம்.

$\Rightarrow\ m_1m_2 x^2 - (m_1 + m_2)\, xy + y^2 = 0$

இதுவும் ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதால், மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்கள் விகித சமமானவை.

$$\frac{m_1m_2}{a} = -\frac{(m_1 + m_2)}{2h} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore\ m_1\, m_2 = \frac{a}{b}\ ;\ \text{(அ.து.) சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன்} = \frac{a}{b}$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}\ \ \text{(அ.து.) சாய்வுகளின் கூடுதல் பலன்} = -\frac{2h}{b}$$

5.4.3 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}\ \text{மற்றும்}\ m_1\, m_2 = \frac{a}{b}$$

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'θ' என்க.

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\, m_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\left[\pm\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1\, m_2}}{1 + m_1\, m_2}\right]\right|$$

$$= \left|\left[\pm\frac{\sqrt{\dfrac{4h^2}{b^2} - \dfrac{4a}{b}}}{1 + \dfrac{a}{b}}\right]\right| = \left|\left[\pm\frac{\sqrt{\dfrac{4h^2 - 4ab}{b^2}}}{\dfrac{a + b}{b}}\right]\right|$$

$$\tan\theta = \left|\left[\frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right]\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\left[\frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right]\right| \text{ i.e. } \theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

θ-ஐ ஒரு குறுங்கோணமாகக் கொள்வது வழக்கமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் (1):

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ‘θ’ எனில்

$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$ இது $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்திற்கும் சமம் ஆகும்.

கிளைத்தேற்றம் (2): நேர்க்கோடுகள் இணையானவை எனில் $h^2 = ab$ ஆகும். [$\because \theta = 0°, \tan\theta = 0$]

கிளைத்தேற்றம் (3): நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை எனில் $a + b = 0$

அதாவது x^2ன் கெழு + y^2ன் கெழு = 0 [$\because \theta = 90°, \tan\theta = \infty$]

x, y-ல் பொதுவான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்பதாகும்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

ஒரு இருபடி பொதுச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

இதனை x-ல் இருபடிச் சமன்பாடாகக் கருதுவோமாயின்,

$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$ என எழுதலாம்.

xன் தீர்வு

$$x = \frac{-(hy + g) \pm \sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a}$$

$$\Rightarrow \quad ax + hy + g = \pm\sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}$$

$$= \pm\sqrt{(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + (g^2 - ac)}$$

ஒவ்வொரு நேர்க்கோடும் x, yல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருக்க வேண்டும் என்றால் வலது பக்கம் உள்ள கோவை ஒரு முழு வர்க்கமாக இருக்க வேண்டும். இது எப்போது முடியும் எனில் வலது பக்கம்

வர்க்கமூலத்தினுள் உள்ள 'y'ன் இருபடிக் கோவையின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore (h^2 - ab)(g^2 - ac) = (gh - af)^2$

இதனை விரிவுபடுத்திப் பின்னர் ஒழுங்குபடுத்தினால்

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்ற தேவையான கட்டுப்பாடு கிடைக்கும்.

எ.கா.5.28: $x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு $a = 1, 2h = 4, b = 3$

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'θ' என்க.

$$\theta = \tan^{-1}\left|\left[\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right]\right| = \tan^{-1}\left|\left[\frac{2\sqrt{4 - 3}}{4}\right]\right| = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

எ.கா. 5.29: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளில் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப் போல மூன்று மடங்கு எனில் $3h^2 = 4ab$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

'm_1', 'm_2' என்பவை இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க. பின்னர்

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b},\ m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

கணக்கின்படி, $m_2 = 3m_1$

$$\therefore m_1 + 3m_1 = -\frac{2h}{b} \Rightarrow m_1 = -\frac{h}{2b}$$

ஆனால் $m_1 . 3m_1 = \frac{a}{b} \Rightarrow 3m_1^2 = \frac{a}{b} \Rightarrow 3\left(\frac{-h}{2b}\right)^2 = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{3h^2}{4b^2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 3h^2 = 4ab$$

எ.கா. 5.30: $x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0$

இதை $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ உடன் ஒப்பிடும்போது

$a = 1, h = 0, b = -1, g = \frac{1}{2}, f = -\frac{3}{2}, c = -2.$

இரட்டை நேர்க்கோட்டிற்கான கட்டுப்பாடு

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = 0$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = (1)(-1)(-2)+2\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(0)-(1)\left(\frac{9}{4}\right)--1)\left(\frac{1}{4}\right)-(2)(0)$$

$$= 2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8-9+1}{4}$$

$$= 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$a + b = 1 - 1 = 0$ எனவே இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 90°.

எ.கா. 5.31: $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + 2 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாட்டை $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ உடன் ஒப்பிடும்போது

$a = 3, b = 2, h = \frac{7}{2}, g = \frac{5}{2}, f = \frac{5}{2}, c = 2.$ இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = (3)(2)(2) + 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) - 3\left(\frac{25}{4}\right) - 2\left(\frac{25}{4}\right) - 2\left(\frac{49}{4}\right)$$

$$= 12 + \frac{175}{4} - \frac{75}{4} - \frac{50}{4} - \frac{98}{4} = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும். இப்போது இருபடி உறுப்புகளைக் காரணிப்படுத்த கிடைப்பது $3x^2 + 7xy + 2y^2 = (x + 2y)(3x + y)$

$3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + 2 = (x + 2y + l)(3x + y + m)$ என்க

x-ன் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த, $3l + m = 5$ ... (1)

y-ன் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த, $l + 2m = 5$ ... (2)

(1), (2) சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க $l = 1, m = 2$

எனவே இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு $x + 2y + 1 = 0$ மற்றும் $3x + y + 2 = 0$

எ.கா. 5.32: $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ என்பது இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இவைகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$

இங்கு $a = 4, h = 2, \ b = 1$; $ab - h^2 = 4(1) - 2^2 = 4 - 4 = 0$

எனவே இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையாகும்.

$4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$

$\therefore\ 4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = (2x + y + l)(2x + y + m)$

x-ன் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த $2l + 2m = -6$ (அ.து.) $l + m = -3$ … (1)

மாறிலிக்களைச் சமன்படுத்த $lm = -4$ … (2)

$$\therefore \qquad l + \left(\frac{-4}{l}\right) = -3 \quad \Rightarrow l^2 + 3l - 4 = 0$$

(அ.து.) $(l + 4)(l - 1) = 0 \quad \Rightarrow \ l = -4, 1$

இங்கு $lm = -4 \quad \Rightarrow \quad m = 1, \ -4$

$2x + y - 4 = 0$ மற்றும் $2x + y + 1 = 0$ என்பன இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகளாகும். இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவு

$$\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \left|\frac{-4 - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right| = \sqrt{5} \text{ அலகுகள்}$$

எ.கா. 5.33: $x + 2y - 3 = 0, 3x - y + 4 = 0$ ஆகிய தனித்தனி சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$(x + 2y - 3)(3x - y + 4) = 0$

(அ.து.) $3x^2 + 6xy - 9x - xy - 2y^2 + 3y + 4x + 8y - 12 = 0$

(அ.து.) $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 5x + 11y - 12 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 5.4

(1) $ax^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் a மற்றும் c-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(2) $(a^2-3b^2)\, x^2+8ab\, xy+(b^2-3a^2)y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(3) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $60°$ எனில் $(a + 3b)\,(3a + b) = 4h^2$ என நிறுவுக.

(4) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 21x + 28y + 6 = 0$ என்பது இரு இணை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. மேலும் அவைகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

(5) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ எனும் ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளில் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப்போல இரண்டு மடங்கு எனில் $8h^2 = 9ab$ என நிறுவுக.

(6) $2x + y + 1 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் ஆதிவழியே செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) $x + 2y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$ ஆகிய தனித்தனி சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) $12x^2+7xy-12y^2-x + 7y + k = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறித்தால் kன் மதிப்பு காண்க. மேலும் இந்த நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகளையும் அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

(9) $12x^2-10xy+2y^2+14x-5y+c = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறித்தால் c-ன் மதிப்பு காண்க. மேலும் இந்த நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகளையும் அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

(10) k-ன் எம்மதிப்பிற்கு $12x^2 + 7xy + ky^2 + 13x - y + 3 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்? மேலும் அவைகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(11) $3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15 = 0$ என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$ எனக் காட்டுக.

5.5 வட்டம் (Circle)

வரையறை : ஒரு நிலையானப் புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் மாறாத தூரத்தில் இருக்குமாறு நகர்ந்து செல்லும் புள்ளியின் நியமப்பாதை வட்டம் எனப்படும். நிலையான புள்ளியை வட்டத்தின் மையம் எனவும், மாறாத தூரத்தை அதன் ஆரம் எனவும் கூறுவர்.

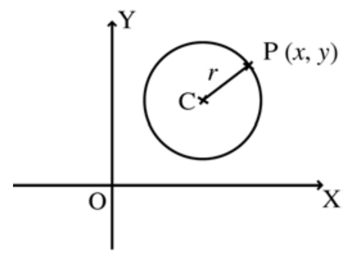
5.5.1 மையம், ஆரம் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு

வட்டத்தின் மையம் $C(h, k)$ எனவும், ஆரம் r எனவும் கொள்க. $P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$CP = r \Rightarrow CP^2 = r^2 \Rightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு : ஆதிப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்டால், (அ.து.) $(h, k) = (0, 0)$ எனில்



படம் 5.8

$x^2 + y^2 = r^2$ என்பது வட்டத்தின் திட்டச் சமன்பாடாகும்.

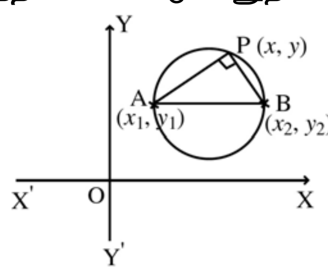
5.5.2 கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டை விட்டமாக கொண்டுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு காணுதல்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளான

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ஆகியவற்றை சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டை விட்டமாகக் கொள்வோம். $P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

அரைவட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணம் ஒரு செங்கோணம், ஆதலால்

PA ஆனது PBக்குச் செங்குத்தாகும்.



படம் 5.9.

$\therefore$ (PA இன் சாய்வு) (PB இன் சாய்வு) = – 1

$$\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)\left(\frac{y - y_2}{x - x_2}\right) = -1$$

$$(y - y_1)(y - y_2) = -(x - x_1)(x - x_2)$$

$\therefore\ (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ இதுவே வட்டத்தின் தேவையான சமன்பாடாகும்.

5.5.3 ஒரு வட்டத்தின் பொதுவான சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆகும்.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$(x + g)^2 + (y + f)^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$$

$$[x - (-g)]^2 + [y - (-f)]^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$$

இது $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ வடிவத்தில் உள்ளது. எனவே நாம் எடுத்துக் கொண்ட சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது, அதன் மையம் $(-g, -f)$, ஆரம் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

எனவே ஒரு வட்டத்தின் பொதுவான சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு : இரண்டாம் படியில் பொதுச் சமன்பாடு

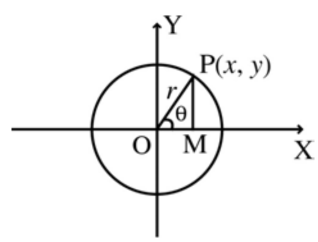
$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்க வேண்டுமானால் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் உண்மையாக வேண்டும்.

(1) $a = b$ (அ.து.) x^2ன் கெழு = y^2ன் கெழு

(2) $h = 0$ (அ.து.) xy உறுப்பு இருக்கக்கூடாது.

5.5.4 துணையலகு வடிவம் (Parametric form) :

ஆதியை மையமாகவும் r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். $P(x, y)$ வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. x-அச்சின் மிகை திசையோடு OP என்ற நேர்க்கோடு θ என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது என்க. Pயிலிருந்து x-அச்சுக்கு PM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரையவும்.



படம் 5.10

படம் (5.10)ன்படி , $\frac{x}{r} = \cos\theta$, $\frac{y}{r} = \sin\theta$.

வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் x மற்றும் yஆகும். இந்த ஆயத்தொலைகள் θ வை பொருத்து அமைகின்றன.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என்ற சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்திற்குரிய துணையலகு சமன்பாடுகள் ஆகும். இங்கு ‘θ’ என்பது துணையலகு $0 \le \theta \le 2\pi$

மற்றொரு துணையலகு வடிவம் :

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$ என்பது நாம் அறிந்தது

$t = \tan\frac{\theta}{2}$ என்க.

$0 \le \theta \le 2\pi$ எனில் $-\infty < t < \infty$

$$x = r\cos\theta \;\Rightarrow\; x = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2} \quad ; \quad y = r\sin\theta \;\Rightarrow\; y = \frac{2rt}{1+t^2}$$

எனவே $x = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2}$, $y = \frac{2rt}{1+t^2}$, $-\infty < t < \infty$ என்பது $x^2+y^2=r^2$ வட்டத்தின் மற்றுமொரு துணையலகு வடிவமாகும்.

$x = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2}$, $y = \frac{2rt}{1+t^2}$ என்பவை வட்டத்தின் சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்கின்றன என்பது தெளிவு.

எ.கா. 5.34: மையம் $(2, -3)$, ஆரம் 4 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

இங்கு $(h, k) = (2, -3)$ மேலும் $r = 4 \quad \therefore \; (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$

(அ.து.) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா.5.35: $(2, -3)$, $(3, 1)$ என்பன ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில், அவ்வட்டத்திற்கான சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

இங்கு $(x_1, y_1) = (2, -3)$, $(x_2, y_2) = (3, 1)$

$\therefore (x-2)(x-3) + (y+3)(y-1) = 0$

$x^2 - 5x + 6 + y^2 + 2y - 3 = 0$

∴ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 3 = 0$

எ.கா.5.36: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

இங்கு $2g = 2,\ 2f = -4,\ c = 3$

∴ மையம் $(-g, -f) = (-1, 2)$

ஆரம் $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1 + 4 - 3} = \sqrt{2}$ அலகுகள்.

எ.கா.5.37: $3x^2+3y^2-2x+6y-6 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $3x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

இதை $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + 2y - 2 = 0$ என்ற வடிவில் எழுதலாம்.

இதை பொதுச் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கையில்

$2g = -\frac{2}{3},\ 2f = 2,\ c = -2$

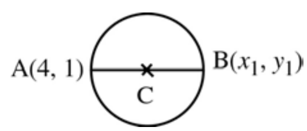
∴ மையம் $(-g, -f) = \left(\frac{1}{3}, -1\right)$

ஆரம் $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{1}{9} + 1 + 2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ அலகுகள்.

எ.கா.5.38: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ என்ற வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு முனை (4, 1) எனில் மற்றொரு முனையைக் காண்க.

தீர்வு :

$x^2+y^2-2x+6y-15=0$ என்ற சமன்பாட்டை வட்டத்தின் பொதுவடிவ சமன்பாட்டோடு ஒப்பிடுகையில்



படம் 5.11

$2g = -2 \quad 2f = 6$

∴ மையம் $C(-g, -f) = C(1, -3)$

விட்டத்தின் ஒரு முனை A (4, 1) எனவும், மறுமுனை $B(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்க.

AB யின் மையம் C எனில்

$$\therefore \quad \frac{x_1 + 4}{2} = 1, \quad \frac{y_1 + 1}{2} = -3 \Rightarrow x_1 = -2, \; y_1 = -7$$

$\therefore$ மறுமுனை $(-2, -7)$ ஆகும்.

எ.கா.5.39: (0,1), (2,3) மற்றும் (−2, 5) ஆகிய புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான வட்டத்தின் பொது அமைப்பு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

இது (0, 1), (2, 3) மற்றும் (− 2, 5) என்ற புள்ளிகளின் வழிச் செல்வதால்

$$\therefore \; 2f + c = -1 \quad \ldots (1)$$

$$4g + 6f + c = -13 \quad \ldots (2)$$

$$-4g + 10f + c = -29 \quad \ldots (3)$$

$(1) - (2) \quad \Rightarrow \quad -4g - 4f = 12$

$$g + f = -3 \quad \ldots (4)$$

$(2) - (3) \quad \Rightarrow \quad 8g - 4f = 16$

$$2g - f = 4 \quad \ldots (5)$$

$(4) + (5) \quad \Rightarrow \quad 3g = 1 \Rightarrow g = \frac{1}{3}$

$(4) \quad \Rightarrow \quad f = -3 - \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$

$(1) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{17}{3}$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + 2\left(-\frac{10}{3}\right)y + \frac{17}{3} = 0$$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 + 2x - 20y + 17 = 0$ என்பது தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா.5.40: (0, 1), (2, 3) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லக்கூடியதும், $x-2y+3=0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீது மையத்தையும் உடைய வட்டத்திற்கான சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

வட்டம் (0, 1), (2, 3) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்கிறது. எனவே

$$\therefore\ 2f + c = -1 \qquad \dots (1)$$

$$\therefore\ 4g + 6f + c = -13 \qquad \dots (2)$$

வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$, $x - 2y + 3 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ளது.

$$\therefore\ -g + 2f = -3 \qquad \dots (3)$$

(1) – (2) $\Rightarrow$ $-4g - 4f = 12$

$g + f = -3$ … (4)

(3) + (4) $\Rightarrow$ $3f = -6$ $\therefore\ f = -2$

(3) $\Rightarrow$ $g = -1$

(1) $\Rightarrow$ $c = 3$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ என்பது தேவையான சமன்பாடாகும்.

எ.கா.5.41:

$(a - 4)x^2 + by^2 + (b - 3)xy + 4x + 4y - 1 = 0$ எனும் சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்குமானால் 'a', 'b'களின் மதிப்புகள் யாவை?

தீர்வு :

$(a - 4)x^2 + by^2 + (b - 3)xy + 4x + 4y - 1 = 0$ என்பது வட்டத்தைக் குறிக்குமெனில்

(i) xy-ன் கெழு $= 0 \Rightarrow b - 3 = 0$ $\therefore\ b = 3$

(ii) x^2ன் கெழு $= y^2$ன் கெழு $\Rightarrow a - 4 = b$ $\therefore\ a = 7$

எனவே $a = 7$, $b = 3$

எ.கா.5.42: $(2, -3)$ஐ மையமாகவும், ஆரம் 3 அலகும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. அவ்வட்டம் (2, 0) என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

(h, k)யை மையமாகவும், r-யை ஆரமாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

இங்கு $(h, k) = (2, -3)$, $r = 3$.

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் (2, 0) என்ற புள்ளியைப் பிரதியிட

இ.ப. $= (2 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 0 + 9 = 9 =$ வ.ப.

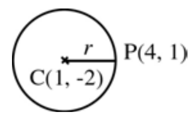
எனவே (2, 0) என்ற புள்ளிவழி வட்டம் செல்கிறது.

எ.கா.5.43:

(4, 1) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் (1, – 2) எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

C (1, – 2) P (4, 1) என்க.



படம் 5.12

ஆரம் $r = CP = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{18}^{\,2}$

(அ.து.) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா. 5.44: $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு $r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$

$x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\therefore x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள்

$x = 4\cos\theta,\ y = 4\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

எ.கா.5.45: $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ என்பன துணையலகு சமன்பாடுகள் எனில் வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$\cos\theta = \frac{x}{2}$; $\sin\theta = \frac{y}{2}$ என்ற சமன்பாடுகளில் இருந்து துணையலகு 'θ'வை நீக்க நமக்கு வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = 4$ என்பது வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 5.5

(1) பின்வரும் வட்டங்களின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க:

(i) $x^2 + y^2 = 1$

(ii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$

(iv) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$

(v) $(x-3)(x-5) + (y-7)(y-1) = 0$

(2) $(a-2)x^2 + by^2 + (b-2)xy + 4x + 4y - 1 = 0$ எனும் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறித்தால் 'a', 'b'க்களின் மதிப்புகளைக் காண்க. வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

(3) (1, 2) என்ற புள்ளியின் வழியாகவும், (2, 3)ஐ மையமாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

(4) 5 அலகுகள் ஆரமாகவும் $x + 2y = 7$, $2x + y = 8$ ஆகியவற்றை விட்டங்களாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

(5) 16π சதுர அலகினை பரப்பாக உடைய வட்டத்தின் மையம் $(7, -3)$ எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(6) $(-4, 5)$ஐ மையமாகவும், 8π அலகைச் சுற்றளவாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(7) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ என்ற வட்டத்தின் சுற்றளவையும், பரப்பையும் காண்க.

(8) (2, 3) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதும் மையம் x-அச்சின் மீதும் உள்ள வட்டத்தின் ஆரம் 5 அலகுகள் எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(9) (1, 2) மற்றும் (2, 4) என்பவை ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(10) (1, 0), (0, − 1) மற்றும் (0, 1) ஆகிய புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(11) (1, 1), (2, −1) மற்றும் (3, 2) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(12) (4, 1), (6, 5) என்ற புள்ளிகள் வழியாகவும் $4x + y = 16$ என்ற கோட்டின் மேல் மையத்தையும் உடைய வட்டத்திற்கான சமன்பாடு காண்க.

(13) (− 1, 2), (3, − 2) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகவும், $x = 2y$ என்ற கோட்டின் மேல் மையத்தையும் உடைய வட்டத்திற்கான சமன்பாடு காண்க.

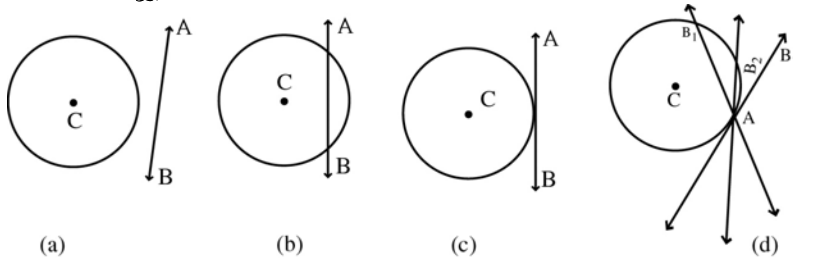
(14) $x = \frac{1}{4}\cos\theta,\ y = \frac{1}{4}\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ என்பதை துணையலகு வடிவமாய் கொண்ட வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு காண்க.

(15) $4x^2 + 4y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டிற்குத் துணையலகு சமன்பாடுகள் காண்க.

5.6 தொடுகோடு (Tangent) :

5.6.1 அறிமுகம் :

C-யை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தையும் AB என்ற நேர்க்கோட்டையும் எடுத்துக்கொள்வோம். படத்தில் காண்பித்துள்ளபடி இந்த நேர்க்கோடு வட்டத்தைப் பொறுத்தவரையில் மூன்று வெவ்வேறான நிலைகளில் இருக்கும்.



படம். 5.13

படம் (5.13 a)ல் நேர்க்கோடு AB ஆனது வட்டத்தைத் தொடவோ அல்லது வெட்டவோ இல்லை.

படம் (5.13 b)ல் நேர்க்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்கிறது. இதனை வெட்டுக்கோடு (secant) என்போம்.

படம் (5.13 c)ல் நேர்க்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை ஒரே இடத்தில் தொட்டுச் செல்கிறது. அதுவே தொடுகோடாகும். வெட்டுக்கோட்டின் வரைவு எல்லையை தொடுகோடு என்போம். (படம் 5.13)

வரையறை: ஒரு நேர்க்கோடு வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டிச் (தொட்டுச்) சென்றால் அதுவே வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்.

5.6.2 (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து வட்டத்தின் தொடுகோடு காணல் :

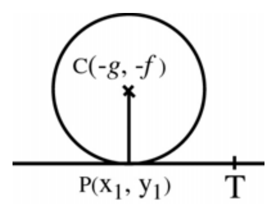
வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ … (1)

$P(x_1, y_1)$ என்பது வட்டத்தின்மேல் உள்ள ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி.

$\therefore x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ … (2)

P யில் வரையப்படும் தொடுகோடு PT என்க.



படம் 5.14

வட்டத்தின் மையம் $C(-g, -f)$

$$CP \text{ ன் சாய்வு} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$$

CP யும் PT யும் செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$\text{PT}\text{யின் சாய்வு} = -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)$$

$\therefore$ தொடுகோடு PT-ன் சமன்பாடு $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - y_1 = -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(y_1 + f) = -(x - x_1)(x_1 + g)$$

$$(y - y_1)(y_1 + f) + (x - x_1)(x_1 + g) = 0$$

$$\Rightarrow \quad yy_1 - y_1^{\ 2} + fy - fy_1 + [xx_1 - x_1^{\ 2} + gx - gx_1] = 0$$

$$\Rightarrow \quad xx_1 + yy_1 + fy + gx = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + gx_1 + fy_1$$

$gx_1 + fy_1 + c$-ஐ இருபுறமும் கூட்ட

$$xx_1 + yy_1 + gx + gx_1 + fy + fy_1 + c = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ இதுவே (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகும்.

கிளைத்தேற்றம் :

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.

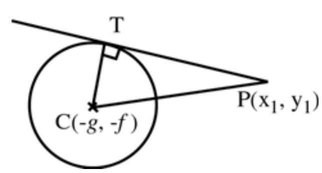
குறிப்பு : வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் x^2-ஐ xx_1 எனவும் y^2-ஐ yy_1 எனவும் x-ஐ $\frac{x + x_1}{2}$ எனவும் மேலும் y-ஐ $\frac{y + y_1}{2}$ எனவும் மாற்றுவதால் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

5.6.3 (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம்

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $\text{P}(x_1, y_1)$யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு PT என்க. வட்டத்தின் மையம் $\text{C}(-g, -f)$ மேலும்



படம் 5.15

ஆரம் $r = \text{CT} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

PCT என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$\text{PT}^2 = \text{PC}^2 - \text{CT}^2$$

$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$
$$= {x_1}^2 + 2gx_1 + g^2 + {y_1}^2 + 2fy_1 + f^2 - g^2 - f^2 + c$$
$$= {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$\therefore$ PT $= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$. இதுவே (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளமாகும்.

குறிப்பு : (1) P என்ற புள்ளி வட்டப் பரிதியின் மேல் இருந்தால் $PT^2 = 0$, (PT என்பது பூச்சியம்).

(2) P என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால், $PT^2 > 0$, (PT என்பது மெய்)

(3) P என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு உள்ளே இருந்தால், $PT^2 < 0$, (PT என்பது கற்பனை)

கிளைத்தேற்றம் :

ஆதியானது வட்டத்திற்கு வெளியிலே அமையும்பொழுது மாறிலி c ஆனது ஒரு மிகை எண்ணாகவும் உள்ளே அமையும் பொழுது c ஒரு குறை எண்ணாகவும், வட்டத்தின் மேலே அமையும் பொழுது c பூச்சியமாகவும் இருக்கும்.

5.6.4 $y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையான கட்டுப்பாடு காணல்.

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு $y = mx + c$ என்க. ஆனால் புள்ளி (x_1, y_1)ல் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$

சமன்பாடுகள் $y = mx + c$ மற்றும் $xx_1 + yy_1 = a^2$ இவை இரண்டும் ஒரே நேர்க்கோட்டை குறிக்கின்றன. எனவே x, yக்களின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலிகள் சமவிகிதத்தில் அமையும்.

$$\therefore \frac{1}{y_1} = -\frac{m}{x_1} = \frac{c}{a^2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-a^2m}{c}, y_1 = \frac{a^2}{c}$$

ஆனால் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் மேல் இருப்பதால்

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \Rightarrow \frac{a^4 m^2}{c^2} + \frac{a^4}{c^2} = a^2$$

$$\Rightarrow \qquad a^2m^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow a^2 (m^2 + 1) = c^2$$

(அ.து.) $c^2 = a^2 (1 + m^2)$ தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

குறிப்பு : (1) $y = mx + c$ என்ற தொடுகோடு, $x^2+y^2= a^2$ என்ற வட்டத்தை தொடும் புள்ளி $\left[\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\text{a}}{\sqrt{1+m^2}}\right]$

(2) $x^2+y^2= a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் எந்த ஒரு தொடுகோடும்

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

5.6.5 ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

(x_1, y_1) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி என்க. தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ என்பது அறிந்ததே. தொடுகோடு (x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழிச்செல்கிறது.

$$\therefore y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y_1 - mx_1 = \pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow \qquad (y_1 - mx_1)^2 = a^2 (1 + m^2)$$

$$\Rightarrow \qquad y_1^2 + m^2 x_1^2 - 2mx_1y_1 - a^2 - a^2m^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad m^2 (x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - a^2) = 0$$

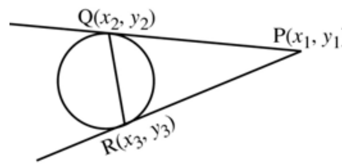
இது 'm'ல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு. எனவே 'm'ற்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. ஆனால் 'm' தொடுகோட்டின் சாய்வைக் குறிக்கும். எனவே ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

குறிப்பு : (1) (x_1,y_1) என்பது ஒரு வெளிப்புள்ளியாயின், இரு தொடுகோடுகளும் மெய்யானவை, தெரியக்கூடியவை.

(2) (x_1,y_1) என்பது ஒரு உட்புள்ளியாயின், இரு தொடுகோடுகளும் கற்பனையானவை, தெரியாதவை.

(3) (x_1,y_1) என்பது பரிதி மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாயின், இரு தொடுகோடுகளும் சேர்ந்த ஒரு ஒன்றிய நேர்க்கோடாகும்.

5.6.6 ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாணின் சமன்பாடு காணல்.



படம் 5.16

வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ … (1)

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ளது என்க. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளிகள் $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ என்க.

$Q(x_2, y_2)$ல் தொடுகோடு PQன் சமன்பாடு

$$xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0 \qquad \dots (2)$$

$R(x_3, y_3)$ல் தொடுகோடு PRன் சமன்பாடு

$$xx_3 + yy_3 + g(x + x_3) + f(y + y_3) + c = 0 \qquad \dots (3)$$

ஆனால் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி சமன்பாடு (2), (3)-ஐ நிறைவு செய்கிறது. எனவே,

$$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0\,, \qquad \dots (4)$$

$$x_1x_3 + y_1y_3 + g(x_1 + x_3) + f(y_1 + y_3) + c = 0 \qquad \dots (5)$$

ஆனால் (4), (5) சமன்பாடுகளிலிருந்து (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) ஆகிய இருபுள்ளிகளும்

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ என்கிற ஒரே நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ளன. எனவே

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ என்பது QR என்ற தொடுநாணின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா. 5.46: $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 12 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (2, 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :

$x^2 + y^2 + 2gx + 2\text{f}y + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 3y_1 + 12}$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 - 4.2 - 3.3 + 12}$$
$$= \sqrt{4 + 9 - 8 - 9 + 12}$$
$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units}$$

எ.கா. 5.47: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு உள்ளே (2, 3) என்ற புள்ளி அமைகிறது எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

P(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

$$PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$
$$PT^2 = 2^2 + 3^2 - 6.2 - 8.3 + 12 = 4 + 9 - 12 - 24 + 12$$
$$= -11 < 0$$

எனவே (2, 3) என்ற புள்ளி வட்டத்தின் உள்ளே உள்ளது.

எ.கா.5.48: (4,3) என்ற புள்ளியில் $x^2+y^2=25$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோட்டின் சமன்பாடு யாது?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = 25$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = 25$.

இங்கு $(x_1, y_1) = (4, 3)$ $\therefore$ (4, 3)ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $4x + 3y = 25$

எ.கா. 5.49: $x^2+y^2=9$ என்ற வட்டத்திற்கு $y=3x+c$ தொடுகோடானால், c-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$y = mx + c$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைவதற்கு உரிய கட்டுப்பாடு $c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$

இங்கு $a = 3, m = 3$

$$\therefore c = \pm 3\sqrt{10}$$

எ.கா. 5.50: $(-2, -2)$ என்ற புள்ளியில் $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு காண்க.

தீர்வு :

(x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 - 4\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + 4\left(\frac{y + y_1}{2}\right) - 8 = 0$$

$xx_1 + yy_1 - 2(x + x_1) + 2(y + y_1) - 8 = 0$

$(-2, -2)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$-2x - 2y - 2(x - 2) + 2(y - 2) - 8 = 0$

$\Rightarrow \quad -4x - 8 = 0$

$\Rightarrow \quad x + 2 = 0$ இதுவே தேவையான தொடுகோட்டின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா. 5.51: $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ என்ற வட்டத்தை $x - 2y = 1$ என்ற நேர்க்கோடு வெட்டுவதால் ஏற்படும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

நாணின் முனைப்புள்ளிகளைக் காண $x = 2y + 1$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் தீர்க்க.

$$(2y + 1)^2 + y^2 - 2(2y + 1) - y + 1 = 0$$

$$4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 4y - 2 - y + 1 = 0$$

$$5y^2 - y = 0 \qquad \therefore\ y(5y - 1) = 0$$

$$y = 0 \quad \Big| \quad y = \frac{1}{5}$$

$$x = 1 \quad \Big| \quad x = \frac{7}{5}$$

$\therefore (1, 0), \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ இரண்டும் நாணின் முனைப்புள்ளிகள்.

$\therefore$ நாணின் நீளம் $= \sqrt{\left(1 - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ அலகுகள்.

எ.கா. 5.52: $3x + 4y - p = 0$ என்ற நேர்க்கோடானது $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைவதற்கான கட்டுப்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$.

இங்கு $a^2 = 16,\ m = -\frac{3}{4},\ c = \frac{p}{4}$

$$c^2 = a^2(1 + m^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{16} = 16\left(1 + \frac{9}{16}\right) = 25$$

$$p^2 = 16 \times 25$$

$$\therefore p = \pm 20$$

எ.கா.5.53: (2, 3) என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு x-அச்சைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

x-அச்சானது வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி P என்க.

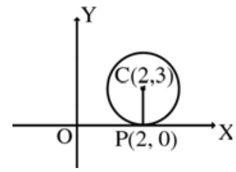
மையம் C(2, 3), P(2, 0)

$r = \text{CP} = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 3$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$



படம் 5.17

பயிற்சி 5.6

(1) (1, 2) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

(2) (0, 5) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$; $x^2 + y^2 - y + 1 = 0$ என்ற வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம் என நிறுவுக.

(3) (2, 1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-4x+8y-5 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(4) (7, − 11) என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 - 10x = 0$ என்ற வட்டத்தின் உள்ளே உள்ளதா அல்லது வெளியே உள்ளதா என்பதைத் தீர்மானிக்க.

(5) (− 2, 1), (0, 0), (4, − 3) ஆகிய புள்ளிகள் $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$ என்ற வட்டத்தைப் பொறுத்து எங்கே அமைந்து உள்ளன என்பதைக் காண்க.

(6) $x + y = 2$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = 4$ என்ற வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

(7) $2x + y - 3 = 0$ என்ற நேர்க் கோட்டிற்கு இணையான $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(8) $x - 7y + 4 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 - 14x + 4y + 28 = 0$ என்ற வட்டத்தை வெட்டினால் ஏற்படும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

(9) (5, 6) என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு (i) x-அச்சைத் தொடும் வட்டம் (ii) y-அச்சைத் தொடும் வட்டம் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(10) (− 3, 2) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடானது, $x + y = 8$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு (i) செங்குத்தாகவும் (ii) இணையாகவும் இருக்குமாறு காண்க.

(12) (1, 4) என்ற புள்ளியில் $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 21 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு காண்க.

(13) $3x + 4y - p = 0$ என்ற கோடானது $x^2 + y^2 - 64 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாவதற்கு உரிய கட்டுப்பாடு காண்க.

(14) $y = x - 1$ என்ற கோடானது $x^2 + y^2 + 2x + y - 3 = 0$ என்ற வட்டத்தை வெட்டினால் ஏற்படும் நாணின் மையப்புள்ளியைக் காண்க.

5.7 வட்டங்களின் தொகுப்பு (Family of circles) :

பொதுமைய வட்டங்கள் (Concentric circles) :

இரண்டோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வட்டங்களோ ஒரே மையத்தைக் கொண்டு இருந்தால் அவை பொது மைய வட்டங்கள் எனப்படும்.

ஒன்றையொன்று தொடும் வட்டங்கள் (Circles touching each other) :

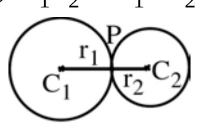
இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகவோ அல்லது உட்புறமாகவோ தொட்டுக் கொள்ளட்டும். C_1, C_2 என்பன அவ்விரு வட்டங்களின் மையங்கள் எனவும், ஆரங்கள் முறையே r_1, r_2 எனவும் தொடுபுள்ளி P எனவும் கொள்க.

நிலைமை (1):

இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொட்டால்

இவற்றின் மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம், ஆரங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

(அ.து.) $C_1C_2 = r_1 + r_2$

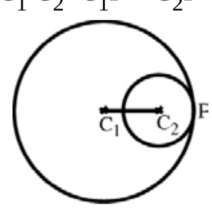


படம் 5.18

நிலைமை (2): இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொட்டால்

இவற்றின் மையங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம், ஆரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமம்.

(அ.து.) $C_1\,C_2 = C_1P - C_2P = r_1 - r_2$



படம் 5.19

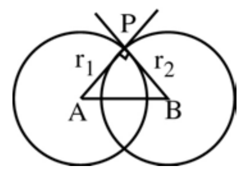
செங்குத்து வட்டங்கள் (Orthogonal circles) :

***வரையறை* :** இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் செங்குத்தானவையாயின், அவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனப்படும். இத்தகைய வட்டங்களை செங்குத்து வட்டங்கள் என்பர்.

இரு வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்வதற்கு உரிய கட்டுப்பாடு :

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ மற்றும்

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ எனும் இரு வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன என்க.



படம் 5.20

A, B என்ற அந்த இரு வட்டங்களின் மையங்கள்

$\therefore$ A $(-g_1, -f_1)$, B $(-g_2, -f_2)$ $r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$ மற்றும்

$r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$

ΔAPBல், $AB^2 = AP^2 + PB^2$

(அ.து.) $(-g_1 + g_2)^2 + (-f_1 + f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$

$\Rightarrow g_1^2 + g_2^2 - 2g_1g_2 + f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$

$\Rightarrow \quad -2g_1g_2 - 2f_1f_2 = -c_1 - c_2$

(அ.து.) $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

இதுவே தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

எ.கா. 5.54: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன எனக்காட்டுக.

***தீர்வு* :**

கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்கள்

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0 \quad \ldots (2)$$

(1) $\Rightarrow g_1 = -2 \quad f_1 = 3, \quad c_1 = 8$. மையம் A(2, – 3)

ஆரம் $r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1} = \sqrt{4 + 9 - 8} = \sqrt{5}$

(2) $\Rightarrow$ $g_2 = -5, f_2 = -3, \quad c_2 = 14$. மையம் B(5, 3)

$$\text{ஆரம் } r_2 = \sqrt{25 + 9 - 14} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{A, Bக்கு இடைப்பட்ட தூரம்} = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-3)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$= r_1 + r_2$$

எனவே தரப்பட்ட இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன.

எ.கா. 5.55: (– 4, –5) வழியாகச் செல்லக்கூடியதும் $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$ என்ற வட்டத்துடன் பொதுமையமும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$

மையம் $(-g, -f) = (2, 3)$

$(-4, -5)$ வழியாகத் தேவையான வட்டம் செல்கிறது.

$\therefore$ ஆரம் $= \sqrt{(2+4)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

இங்கு $(h, k) = (2, 3), \quad r = 10$

$\therefore \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$ இதுவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எ.கா. 5.56: $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 23 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 5y + 16 = 0$ ஆகிய வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 23 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 5y + 16 = 0 \quad \ldots (2)$$

(1) $\Rightarrow$ $g_1 = -4, \quad f_1 = 3, \quad c_1 = -23$

(2) $\Rightarrow$ $g_2 = -1, \quad f_2 = -\frac{5}{2}, \quad c_2 = 16$

இரண்டு வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்வதற்கான கட்டுப்பாடு

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$$

$$2g_1g_2 + 2f_1 f_2 = 2(-4)(-1) + 2(3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 8 - 15 = -7$$

$$c_1 + c_2 = -23 + 16 = -7$$

$$\therefore \quad 2g_1g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$$

$\therefore$ இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன. எனவே இவை செங்குத்து வட்டங்களாகும்.

எ.கா. 5.57 :

(1, 2) என்ற புள்ளிவழிச் செல்லக்கூடியதும் $x^2 + y^2 = 9$ மற்றும் $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ என்ற வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ … (1)

(1, 2) என்ற புள்ளிவழியாக வட்டம் (1) செல்வதால்

$$\therefore \quad 1 + 4 + 2g + 4f + c = 0$$

$$2g + 4f + c = -5 \quad \ldots (2)$$

வட்டம் (1), $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தை செங்குத்தாக வெட்டுவதால்

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$$

$$\Rightarrow \quad 2g(0) + 2f(0) = c - 9$$

$$\therefore \quad c = 9 \quad \ldots (3)$$

மேலும் வட்டம் (1), $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ என்ற வட்டத்தை செங்குத்தாக வெட்டுகிறது.

$$\therefore \quad 2g(-1) + 2f(4) = c - 7$$

$$\Rightarrow \quad -2g + 8f = 9 - 7 = 2$$

$$\Rightarrow \quad -g + 4f = 1 \quad \ldots (4)$$

$$\therefore (2) \quad \Rightarrow \quad 2g + 4f = -14$$

$$\therefore \quad g + 2f = -7 \quad \ldots (5)$$

$$(4) + (5) \quad \Rightarrow \quad 6f = -6 \;\Rightarrow\; f = -1$$

$$(5) \quad \Rightarrow \quad g - 2 = -7 \;\Rightarrow\; g = -5$$

$\therefore$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$

பயிற்சி 5.7

(1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$, $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 15 = 0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன எனக் காட்டுக.

(2) $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + y + 8 = 0$ மேலும்

$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 37 = 0$ என்ற வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரு வட்டங்களைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

(3) 7 அலகுகள் ஆரமும் $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 4 = 0$ என்ற வட்டத்துடன் பொதுமையமும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

(4) (5, 4) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லக்கூடியதும்,

$x^2 + y^2 - 8x + 12y + 15 = 0$ என்ற வட்டத்துடன் பொதுமையமும் கொண்ட வட்டத்திற்கான சமன்பாடு யாது?

(5) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ என்ற வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்கள் எனக் காட்டுக.

(6) பின்வரும் வட்டங்களை செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(i) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $x^2+y^2 - 4x+3 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 2x + 17y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 7x + 6y + 11 = 0$

மற்றும் $x^2 + y^2 - x + 22y + 3 = 0$

(7) (1, – 1) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0$,

$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$ என்ற வட்டங்களை செங்குத்தாக வெட்டுவதுமான வட்டத்திற்கான சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) (1, 1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்வதும்

$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ என்ற வட்டங்களை செங்குத்தாக வெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

6. திரிகோணமிதி (முக்கோணவியல்)

6.1 அறிமுகம் :

கணிதவியலில் திரிகோணமிதி என்ற பகுதி மிகவும் பழமையானது. திரிகோணமிதி என்ற சொல் முக்கோண அளவுகளைக் குறிக்கிறது. பழங்காலத்தில் வானியலில் திரிகோணமிதியை ஒரு கருவியாகப் பயன்படுத்தினர். பாபிலோனியர்கள் ஒரு வருடத்திற்கு 360 நாட்கள் என்பதை மனத்திற் கொண்டு ஒரு வட்டத்தை 360 பகுதிகளாகப் பிரித்து கோணங்களை நமக்கு அளித்தனர்.

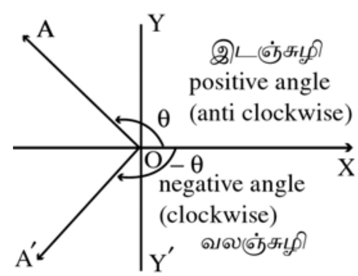
கி.பி. 300 முதல் 400க்குள் சைன் சார்பை இந்தியர்கள் கண்டுபிடித்தனர். ஒன்பதாம் நூற்றாண்டுக்குள் அரேபியர்கள் எல்லா திரிகோணமிதி சார்புகளையும் மற்றும் அவைகள் அடங்கியுள்ள முற்றொருமைகளையும் தெரிந்து கொண்டனர்.

முற்காலத்தில் திரிகோணமிதி, முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்களை கண்டுபிடிக்க மட்டுமே பயன்படுத்தப்பட்டது. இப்போது திரிகோணமிதி பொறியியல், நில அளவையியல் (surveying), கடற்படையியல் (navigation) போன்ற எல்லாத் துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. எல்லா உயர்மட்ட கல்விக்கும் திரிகோணமிதியின் அடிப்படைக் கொள்கைகளும் அவற்றைப் பற்றிய அறிவும் இன்றியமையாதவையாக இருக்கின்றன.

6.1.1 கோணங்கள் (Angles) :

ஒரு கோடு அதன் தொடக்க நிலையிலிருந்து (initial position) முடிவு நிலை வரை ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து சுழலும் அளவையைக் கோணம் என்கிறோம். வலஞ்சுழியாகச் சுழலுவதை மிகை என்றும் இடஞ்சுழியாகச் சுழலுவதை குறை என்றும் அழைக்கிறோம்.

OA என்ற சுழலும் கதிரின் ஒருமுனை O என எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 6. 1

சுழலும் கதிர் OAயை கோணத்தின் முடிவுப்பக்கம் (terminal side) என்றும் x-அச்சின் மிகை அரைப்பகுதி (OX)யைத் தொடக்கப்பக்கம் என்றும் அழைக்கிறோம்.

$\underline{|XOA}$ என்பது மிகைக் கோணம் θ (இடஞ்சுழி)

$\underline{|XOA'}$ என்பது குறைக் கோணம் θ (வலஞ்சுழி)

குறிப்பு : 1. ஒரு முழுச் சுற்று (இடஞ்சுழியாக) = 360°

2. சுழற்சி இல்லையெனில் கோணத்தின் அளவு 0°.

6.1.2 கோணங்களின் அளவு (Measurement of angles) :

ஒரு கோணத்தின் அளவு தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை $\left(\frac{1}{360}\right)$ மடங்கு சுழற்சிக்குச் சமமாக இருந்தால் 1 பாகை (one degree) என்பர். அதை 1° என்றும் குறிப்பிடுகிறோம். பாகையை கலைகள் மற்றும் விகலைகளாகப் பிரிக்கிறோம்.

அ.து. 1 பாகை (1°) = 60 கலைகள் (minutes) (60′)

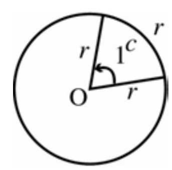
1 கலை (1′) = 60 விகலைகள் (seconds) (60″)

கோணத்தின் அளவினை வட்ட அளவை (circular measure) முறையாகவும் அளவிடலாம். இந்த அளவின் அலகினை ரேடியன் என்கிறோம்.

6.1.3 ரேடியன் அளவு (Radian measure) :

வரையறை :

r என்ற ஆரத்திற்குச் சமமான வட்ட வில் வட்டமையம் O வில் தாங்கும் கோணம் ஒரு ரேடியன் எனப்படும். இதை 1^c எனக் குறிக்கிறோம்.



படம் 6. 2

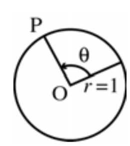
குறிப்பு : 1. கோணத்தின் அளவை எண்களில் காண நாம் ரேடியனைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

2. ரேடியன் என்ற வார்த்தையை சில சமயங்களில் எழுதாமலும் விட்டுவிடலாம். ஆகவே ஒரு சுழற்சியில் அலகு (unit) கொடுக்கப்படவில்லை எனில் அது ரேடியனைக் குறிக்கும்.

3. 1^cல் '*c*' என்பது வட்டஅளவைக் குறிக்கும்.

6.1.4 பாகைகளுக்கும் ரேடியன்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு (Relation between Degrees and Radians) :

r ஆரமுடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π*r* எனவே 1 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π. θ என்பது ஒரு முழுச்சுற்று எனில் P என்பது 1 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தின் பரிதியை முழுமையாகச் சுற்றும்.



படம் 6. 3

θ என்பது இடஞ்சுழியாக ஒரு முழுச்சுற்று எனில் θ = 2π ரேடியன் என்கிறோம். ஒரு முழுச்சுற்று = 360° என்பது நமக்குத் தெரியும். 360° = 2π ரேடியன்கள் அல்லது 180° = π ரேடியன். $1° = \frac{\pi}{180}$ ரேடியன். மேலும்

$\frac{180°}{\pi}$ = 1 ரேடியன். எனவே 1° = 0.01746 ரேடியன் (தோராயமாக).

1 ரேடியன் = $180° \times \frac{7}{22}$ = 57° 16′ (தோராயமாக).

சில கோணங்களுக்கான ரேடியன் மாற்றம் :

பாகைகள்	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ரேடியன்கள்	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

(அட்டவணை 6.1)

எ.கா. 6.1: மாற்றுக (i) 150°ஐ ரேடியனாக (ii) $\frac{3\pi}{4}$ ஐ கோணமாக

(iii) $\frac{1}{4}$ ரேடியனை கோணமாக

தீர்வு :

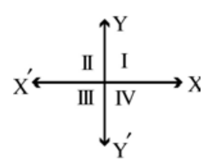
(i) 150° = $150 \times \frac{\pi}{180}$ ரேடியன் = $\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\frac{3\pi}{4}$ ரேடியன் = $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180°}{\pi}$ = 135°

(iii) $\frac{1}{4}$ ரேடியன் = $\frac{1}{4} \times \frac{180}{\pi} = \frac{1}{4} \times 180 \times \frac{7}{22}$ = 14° 19′ 5″

6.1.5 கால் பகுதிகள் (Quadrants) :

படம் (6.4)ல் X′OX, YOY′ என்பவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகள். X′OXஐ x-அச்சு என்றும் and YOY′ஐ y-அச்சு என்றும் அழைக்கிறோம்.



படம் 6. 4

இந்த அச்சுகள் தளத்தை 4 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. அவைகளை கால்பகுதிகள் என்கிறோம்.

XOY, YOX′, X′OY′ மற்றும் Y′OX என்பவைகள் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் மற்றும் நான்காம் கால்பகுதி என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

***திட்டநிலையில் உள்ள கோணம்* (Angle in standard position) :**

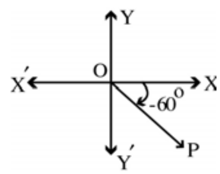
ஒரு கோணத்தின் உச்சியானது O-லும், அதன் தொடக்கக் கோடு x-அச்சாகவும் அமைந்தால், கோணமானது திட்ட நிலையில் உள்ளது எனப்படும்.

ஒரு கால் பகுதியில் உள்ள கோணம் :

ஒரு கோணத்தின் திட்டநிலைக்குரிய முடிவுப்பக்கம் எந்தக் கால் பகுதியில் உள்ளதோ, அந்தக் கால்பகுதியில் தரப்பட்ட கோணம் அமைந்துள்ளதாகக் கருதப்படும்.

எ.கா. 6.2: *கீழ்க்கண்ட கோணங்களின் முடிவுப்பகுதி எந்தக் கால்வட்டத்தில் உள்ளது என்பதைக் காண்க.*

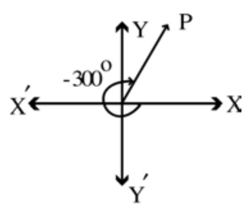
(i) – 60°



படம். 6. 5 a

படம் (6.5a)ல் – 60°ன் முடிவுப் பக்கம் IVவது கால் பகுதியில் உள்ளது..

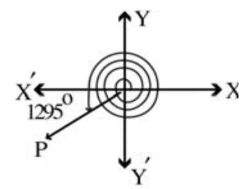
(ii) – 300°



படம். 6.5 b

படம் (6.5b)ல் – 300°ன் பக்கம் முதல் கால் பகுதியில் உள்ளது.

(iii) 1295°



படம். 6.5 c

படம் (6.5c)ல்

1295° = 3×360°+180° + 35° ன் முடிவுப்பக்கம் III கால் பகுதியில் உள்ளது.

பயிற்சி 6.1

(1) *கீழ்க்கண்ட கோணங்களின் அளவுகளை ரேடியன் அளவில் மாற்றுக.*

(i) 30° (ii) 100° (iii) 200° (iv) – 320°

(v) – 85° (vi) 7° 30′

(2) *கீழ்க்கண்ட ரேடியன் அளவுகளை கோணங்களாக மாற்றுக.*

(i) $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (ii) $\left(\frac{18\pi}{5}\right)$ (iii) – 3 (iv) $\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

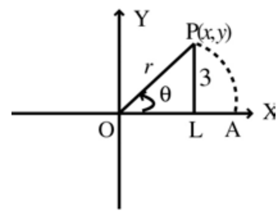
(3) *கீழ்க்கண்ட கோணங்கள் எந்த கால் பகுதியில் அமையும் எனக் காண்க.*

(i) 380° (ii) – 140° (iii) 1100°

6.2 திரிகோணமிதி விகிதங்களும் முற்றொருமைகளும் (Trigonometrical ratios and Identities)

6.2.1 திரிகோணமிதி விகிதங்கள் :

தளத்தில் x-அச்சின் மிகைப்பகுதியில் A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். A என்ற புள்ளி ஆதியைப் பொருத்து இடஞ்சுழியாக θ கோணம் சுழன்று P என்ற புள்ளியை அடையட்டும். இப்போது $\angle XOP = \theta$. Pன் அச்சு தூரங்கள் (x, y) என்க. OXக்கு செங்குத்தாக PL வரைக.



படம் 6. 6

ΔOLP ஒரு செங்கோண முக்கோணம். θ என்பது திட்டநிலையிலுள்ள கோணம் (standard position). ΔOLPயிலிருந்து

OL = x = அடுத்துள்ள பக்கம்; PL = y = எதிர் பக்கம் ;

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{கர்ணம் } (= r > 0)$$

திரிகோணமிதி விகிதங்கள் கீழே வரையறுக்கப்படுகின்றன:

sine என்பது $\frac{y}{r}$ என்கிற விகிதமாக குறிக்கப்படுகின்றது.

அ.து. $\sin\theta = \frac{y}{r}$; cosecant value at $\theta = \frac{r}{y}$ = cosec θ ; $y \neq 0$

மற்றும் $\cos\theta = \frac{x}{r}$; secant value at $\theta = \frac{r}{x}$ = sec θ ; $x \neq 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$; cotangent value at $\theta = \frac{x}{y}$ = cot θ ; $y \neq 0$

Note : 1. மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து tanθ, secθ என்பவைகள் $x = 0$ எனும்போது வரையறுக்கப்படவில்லை. cotθ, cosecθ என்பவைகள் $y = 0$ எனும்போது வரையறுக்கப்படவில்லை.

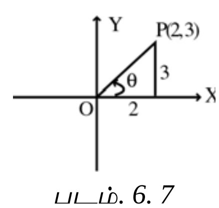
2. cosecθ, secθ மற்றும் cotθ என்பவைகள் முறையே sinθ, cosθ மற்றும் tanθ ன் தலைகீழ் சார்புகளாகும்.

எ.கா. 6.3: (2, 3) என்ற புள்ளி θன் முடிவுப்பக்கத்தில் இருந்தால் அதன் ஆறு திரிகோணமிதி விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

P(x, y) என்பது (2, 3)ஐக் குறிக்கிறது. இது முதல் கால்பகுதியில் உள்ளது.

$\therefore x = 2, \quad y = 3$; $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$



படம். 6. 7

$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $\cot\theta = \frac{2}{3}$

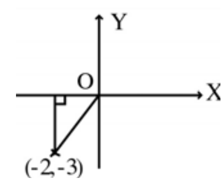
Note : 1. எடுத்துக்காட்டு 6.3லிருந்து, ஒரு கோணத்தின் முடிவுப்பக்கம் முதல் கால் பகுதியில் இருந்தால் எல்லா திரிகோணமிதி விகிதங்களும் மிகை என நமக்குத் தெரிகிறது.

இப்போது ஒரு கோணத்தின் முடிவுப்பக்கம் மற்ற கால்பகுதிகளில் அமையும்போது திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறி எவ்வாறு மாறுபடும் என்பதைப் பார்ப்போம்.

எ.கா. 6.4: (– 2, – 3) என்ற புள்ளி θன் முடிவுப்பக்கத்தில் அமைந்தால் அதன் ஆறு திரிகோணமிதி விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

P(x, y) என்பது (– 2, – 3)ஐக் குறிக்கட்டும். இப்புள்ளி மூன்றாவது கால்பகுதியில் அமைகிறது.



படம். 6. 8

$\therefore x = -2$, $y = -3$;

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -ve$; $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -ve$; $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} = +ve$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{-3} = -ve$; $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{-2} = -ve$; $\cot\theta = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} = +ve$

இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து திரிகோணமிதி சார்புகள் குறைஎண்ணாகவும் இருக்கலாம் என அறிகிறோம். r என்பது எப்போதும் மிகை எண்ணாக இருப்பதால் $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}$ என்பவை yன் குறியைப் பெற்றிருக்கும். எனவே sin θ, cosec θ என்பவைகள் முதல், இரண்டாம் கால் பகுதியில் இருக்கும்போது மிகை எண்ணைப் பெறும். θ என்பது மூன்றாவது, நான்காவது கால்பகுதியில் இருக்கும்போது குறை குறியை பெறும். மற்ற திரிகோணமிதி சார்புகளின் குறிகளை இதேபோன்று காணலாம்.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை θஐப் பொறுத்து குறிகளைக் காட்டுகிறது,

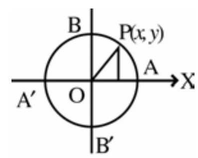
கால்பகுதிகள் சார்புகள்	I	II	III	IV
Sin	+	+	–	–
Cos	+	–	–	+
Tan	+	–	+	–
Cosec	+	+	–	–
Sec	+	–	–	+
Cot	+	–	+	–

II sin cosec	I All
III tan cot	IV cos sec

அட்டவணை 6.2

6.2.2 குறிப்பிட்ட கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் : (Trigonometrical ratios of particular angles)

X′OX. YOY′ *என்பது கார்ட்டீசியன் அச்சுகள் என்க.* O *என்பதை மையமாகவும் ஒரு அலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டம் வரைக. அது* x, y *அச்சுகளை* A, B, A′, B′ *என்ற புள்ளிகளில் படத்தில் கண்டவாறு வெட்டட்டும்.*



படம் 6. 9

A *என்ற இடத்திலிருந்து வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி நகரட்டும். அது* θ *அளவுள்ள வட்டவில் நீளத்தைக் கடந்து* P*ஐ அடையட்டும்.*

P *என்ற புள்ளியை* P(x, y) *என்க. எனவே வரையறையின்படி*

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$.

மாறும்புள்ளி (variable point) *வட்டத்தின் மீது வலஞ்சுழியாகவோ அல்லது இடஞ்சுழியாகவோ சுற்றுவதற்கு ஏற்ப வட்ட வில்லின் குறி குறையாகவோ அல்லது மிகையாகவோ இருக்கும்.*

cos θ *மற்றும்* sinθ*-ன் வீச்சு* (Range of cosθ and sin θ):

அலகு வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y)*க்கும்*

$-1 \leq x \leq 1$ *மற்றும்* $-1 \leq y \leq 1$ *என்பது உண்மையாகும்.*

எனவே $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ *மற்றும்* $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ and 2π*ஆக இருக்கும்போது* cosθ, sinθ*ன் மதிப்பு*

(Values of cosθ and sinθ for $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ and 2π)

ஓரலகு ஆரமுடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π *என நமக்குத் தெரியும். ஒரு நகரும் புள்ளி* A*யிலிருந்து நகர்ந்து இடஞ்சுழியாக நகர்ந்தால்* A, B, A′, B′, A *என்ற புள்ளிகளில் வில்லின் நீளம்* $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

மேலும் அப்புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் (co-ordinates):
A(1, 0), B(0, 1), A′(–1, 0), B′(0,– 1) and A(1, 0) ஆகும்.

A(1, 0)-ல் $\theta = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$ *மற்றும்* $\sin 0 = 0$

B (0, 1)-ல் $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$ *மற்றும்* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

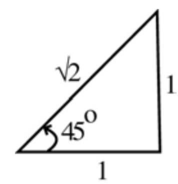
A′ (–1, 0)-ல் $\theta = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1$ *மற்றும்* $\sin \pi = 0$

B′ (0, – 1)-ல் $\theta = 3\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 3\frac{\pi}{2} = 0$ *மற்றும்* $\sin 3\frac{\pi}{2} = -1$

A (1, 0)-ல் $\theta = 2\pi \Rightarrow \cos 2\pi = 1$ *மற்றும்* $\sin 2\pi = 0$

6.2.3 30°, 45° *மற்றும்* 60°*ன் திரிகோணமிதி விகிதங்கள்* :
(Trigonometrical ratios of 30°, 45° and 60°)

ஒரு இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். சம பக்கங்களின் நீளங்கள் 1 அலகு என்க. இதன் கர்ணம் $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. இதன் அடிக்கோணம் (base angle) 45°.



படம் *6. 10*

எதிர்பக்கம்= 1
அடுத்துள்ள பக்கம் = 1
கர்ணம் $= \sqrt{2}$

$\therefore \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 45° = 1$

$\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$; $\sec 45° = \sqrt{2}$; $\cot 45° = 1$

2 அலகு பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் 60°. CD என்பது கோணம் Cன் இருசமவெட்டியாகட்டும் (bisector). ஆகவே ACD = 30°. மேலும் AD = 1, CD = $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. இப்போது செங்கோண முக்கோணம் ACDல்

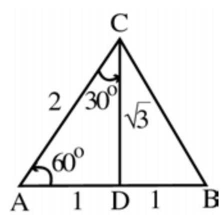
கோணம் 30°க்கு

எதிர்பக்கம் = 1
அடுத்துள்ள பக்கம் $= \sqrt{3}$
கர்ணம் = 2

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$



படம் *6. 11*

கோணம் 60°க்கு

எதிர்பக்கம் $= \sqrt{3}$
அடுத்துள்ள பக்கம்= 1
கர்ணம் = 2

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$

$\therefore$ cosec $30° = 2$

$\therefore$ sec $30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ cot $30° = \sqrt{3}$

$\therefore$ cosec $60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

sec $60° = 2$

$\therefore$ cot $60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

அட்டவணை 6.3

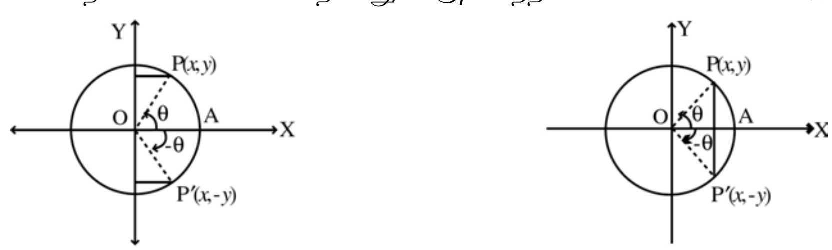
முக்கியமான முடிவுகள் :

θன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\cos(-\theta) = \cos\theta$ மேலும் $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

நிரூபணம் :

X′OX மேலும் YOY′ என்பவைகள் கார்ட்டீசியன் அச்சுகள் என்க. Oஐ மையமாகவும் 1 அலகு ஆரமும் கொண்ட வட்டமானது OXஐ Aல் சந்திக்கட்டும். இப்போது ஒரு நகரும் புள்ளி Aயிலிருந்து இடஞ்சுழியாக நகர்ந்து $P(x, y)$ஐ அடையட்டும். வட்டவில் AP = θ.

இதற்கு மாறாக நகரும் புள்ளி Aயிலிருந்து வலஞ்சுழியாக நகர்ந்து வில்லின் நீளம் AP′ = AP என்றவாறு P′ அமைந்தால் வட்டவில் AP′= $-\theta$.



படம். 6. 12

எனவே $\underline{|AOP} = \theta$ மேலும் $\underline{|AOP'} = -\theta$

வடிவியல் கணிதத்திலிருந்து, P′ன் ஆயத் தொலைகள் $(x, -y)$ என அறிவோம்.

P, P′ என்ற புள்ளிகளின் தூரங்கள் y அச்சிலிருந்து $\cos\theta$, $\cos(-\theta)$ என்பதைக் குறிக்கிறது. இவை ஒவ்வொன்றும் xக்குச் சமம்.

$\therefore \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin\theta$ மற்றும் $\sin(-\theta)$ என்பவைகள் P, P′லிருந்து x-அச்சுக்கு உள்ள தூரத்தை குறிக்கின்றன. $\sin\theta = y$ என்பதால் $\sin(-\theta) = -y$, $\therefore \sin(-\theta) = -\sin\theta$

துணை முடிவுகள் : $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$; $\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$; $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

6.2.4 (90° ± θ), (180° ± θ), (270° ± θ) மற்றும் (360° ± θ)ன் திரிகோணமிதி விகிதங்கள்

(T-ratios of (90° ± θ), (180° ± θ), (270° ± θ) and (360° ± θ):

θ என்பது சிறிய கோணமெனில் $(0 < \theta < 90°)$, $90° - \theta, 90° + \theta$ மற்றவைகள் எந்த கால் பகுதியில் அமையும் என்பது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

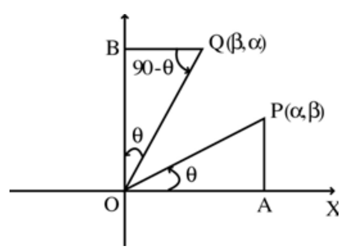
Angle	Quadrant
$90° - \theta$	Q_1 (first quadrant)
$90° + \theta$	Q_2
$180° - \theta$	Q_2
$180° + \theta$	Q_3
$270° - \theta$	Q_3
$270° + \theta$	Q_4
$360° - \theta$; also equal to "$-\theta$"	Q_4
$360° + \theta$	Q_1

அட்டவணை 6.4

$P(\alpha, \beta)$ என்ற புள்ளி முதல் கால்பகுதியில் இருப்பதாகக் கொள்க. $\angle XOP = \theta°$ என்க.

$$\therefore \sin\theta = \frac{\beta}{OP} \ ; \ \cos\theta = \frac{\alpha}{OP} \ ; \ \tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{\beta} \ ; \ \sec\theta = \frac{OP}{\alpha} \ ; \ \cot\theta = \frac{\alpha}{\beta}$$



படம் 6. 13

(90° − θ)ன் திரிகோணமிதி விகிதங்கள்

முதல் கால் பகுதியில் $\angle XOQ = 90° - \theta$ என்றிருக்குமாறு Q என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும் OQ = OP.

PA, QB என்பவைகள் OX, OYக்கு செங்குத்து

$\Delta OAP \equiv \Delta OBQ$ மேலும் Q என்பது (β, α). எனவே

$$\sin (90^\circ - \theta) = \frac{\theta\text{ன் } y \text{ தொலைவு}}{OQ} = \frac{\alpha}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos (90^\circ - \theta) = \frac{\theta\text{ன் } x \text{ தொலைவு}}{OQ} = \frac{\beta}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan (90^\circ - \theta) = \frac{\theta\text{ன் } y \text{ தொலைவு}}{\theta\text{ன் } x \text{ தொலைவு}} = \frac{\alpha}{\beta} = \cot\theta$$

இதேபோல, $\operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) = \sec\theta$

$\sec (90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\cot (90^\circ - \theta) = \tan\theta$

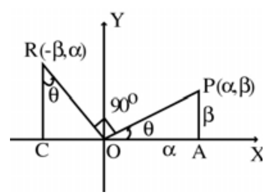
$(90^\circ + \theta)$ன் திரிகோண விகிதம் :

(T-ratios of $(90^\circ + \theta)$)

இரண்டாவது கால் பகுதியில்

$\angle XOR = 90^\circ + \theta$ என்றவாறு R என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

மேலும் OR = OP, RC என்பது xஅச்சுக்கு செங்குத்து.



படம் 6. 14

எனவே $\Delta OAP \equiv \Delta RCO$ மேலும் $R(-\beta, \alpha)$, எனவே

$$\sin (90^\circ + \theta) = \frac{R\text{ன் } y \text{ தொலைவு}}{OR} = \frac{\alpha}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos (90^\circ + \theta) = \frac{R\text{ன் } x \text{ தொலைவு}}{OR} = \frac{-\beta}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan (90^\circ + \theta) = \frac{R\text{ன் } y \text{ தொலைவு}}{R\text{ன் } x \text{ தொலைவு}} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\cot\theta$$

இதே போல, $\operatorname{cosec} (90^\circ + \theta) = \sec\theta$

$\sec (90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

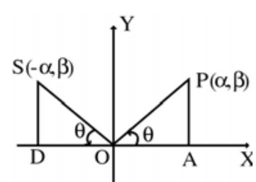
$\cot (90^\circ + \theta) = -\tan\theta$

$(180^\circ - \theta)$ன் திரிகோணமிதி விகிதம் :

(T-ratios of $(180^\circ - \theta)$)

இரண்டாம் கால் பகுதியில் S என்ற புள்ளியை $\angle XOS = 180^\circ - \theta$ என்றிருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும் OS = OP

x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக SD வரைக.



படம் 6. 15

ஆகவே $\Delta OAP \equiv \Delta ODS$ மேலும் S is $(-\alpha, \beta)$. எனவே

$$\sin(180° - \theta) = \frac{\text{S்ன் } y \text{ தொலைவு}}{\text{OS}} = \frac{\beta}{\text{OP}} = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{\text{S்ன் } x \text{ தொலைவு}}{\text{OS}} = \frac{-\alpha}{\text{OP}} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \frac{\text{S்ன் } y \text{ தொலைவு}}{\text{S்ன் } x \text{ தொலைவு}} = \frac{\beta}{-\alpha} = -\tan\theta$$

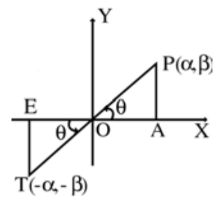
இதேபோன்று, $\text{cosec}\ (180° - \theta) = \text{cosec}\ \theta$

$\sec\ (180° - \theta) = -\sec\theta$

$\cot\ (180° - \theta) = -\cot\theta$

(180° + θ)*ன் திரிகோணமிதி விகிதம்* :

(T-ratios of (180° + θ))



படம். 6. 16

மூன்றாம் கால் பகுதியில் $\lfloor\underline{\text{XOT}}$ = 180° + θ *என்றிருக்குமாறு* T*என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும்* OT = OP

x-அச்சிற்கு செங்குத்தாக TE *வரைக.*

எனவே $\Delta\text{OAP} \equiv \Delta\text{OET}$ *மேலும்* $T = (-\alpha, -\beta)$. *எனவே*

$$\sin(180° + \theta) = \frac{\text{T்ன் } y \text{ தொலைவு}}{\text{OT}} = \frac{-\beta}{\text{OP}} = -\sin\theta$$

$$\cos(180° + \theta) = \frac{\text{T்ன் } x \text{ தொலைவு}}{\text{OT}} = \frac{-\alpha}{\text{OP}} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° + \theta) = \frac{\text{T்ன் } y \text{ தொலைவு}}{\text{T்ன் } x \text{ தொலைவு}} = \frac{-\beta}{-\alpha} = \tan\theta$$

இதேபோன்று, $\text{cosec}\ (180° + \theta) = -\text{cosec}\ \theta$

$\sec\ (180° + \theta) = -\sec\theta$

$\cot\ (180° + \theta) = \cot\theta$

***குறிப்புரை* (Remark) :**

எந்த ஒரு கோணத்திற்கும் திரிகோணமிதி விகிதம் காண கீழ்க்கண்ட வழிமுறைகளை பின்பற்றவும்.

(i) கோணத்தை $k\frac{\pi}{2} \pm \theta$; $k \in Z$ என்ற வகையில் எழுதவும்.

(ii) கோணத்தின் முடிவுப்பக்கம் எந்தக் கால் பகுதியில் அமைகின்றது என்பதை கண்டுபிடிக்கவும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட திரிகோணமிதி சார்பு எந்த கால்பகுதியில் அமைகின்றதோ அதற்குரிய குறியை $\frac{\text{S} \quad \text{A}}{\text{T} \quad \text{C}}$ என்ற விதியைப் பயன்படுத்தி கண்டுபிடிக்கவும்.

(iv) k ஒரு இரட்டை எண்ணாயின் $\left(k\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ல் திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் மதிப்புகள் θல் காணப்பட்ட மதிப்புகளுக்குச் சமமாகும்.

(v) k என்பது ஒற்றைப்படை எண் எனில் கீழ்க்காணும் மாற்றங்களை கடைபிடிக்கவும் sine $\leftrightarrow$ cos ; tan $\leftrightarrow$ cot ; sec $\leftrightarrow$ cosec

தொடர்புடைய கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் :

(Trigonometrical ratios for related angles)

Angle / function	$-\theta$	$90-\theta$	$90+\theta$	$180-\theta$	$180+\theta$	$270-\theta$	$270+\theta$	$360-\theta$ or $-\theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$
cos	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$
tan	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$
cosec	$-\text{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$	$-\text{cosec}\,\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\text{cosec}\,\theta$
sec	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$	$-\text{cosec}\,\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\text{cosec}\,\theta$	$\text{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$
cot	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$

அட்டவணை 6.5

குறிப்பு : 360° என்பது ஒரு முழு சுழற்சியைக் குறிப்பதால் sin(360°+45°) ; sin (720°+45°);sin (1080°+45°) என்பவைகள் sine-ன் (45°)க்கு சமம். அதாவது ஒரு கோணம் 360°ஐ விட அதிகமாயின் 360°ன் மடங்குகளை நீக்கிவிட்டு அந்தக் கோணத்தை 0°க்கும் 360°க்கும் இடையில் அமையுமாறு சுருக்கிப் பெறவேண்டும்.

எ.கா. 6.5:

சுருக்குக : (i) tan 735° (ii) cos 980° (iii) sin 2460° (iv) cos (–870°) (v) sin (–780°) (vi) cot (–855°) (vii) cosec 2040° (viii) sec (– 1305°)

தீர்வு :

(i) $\tan(735°) = \tan(2 \times 360° + 15°) = \tan 15°$

(ii) $\cos 980° = \cos(2 \times 360° + 260°) = \cos 260°$

$= \cos(270° - 10°) = -\sin 10°$

(iii) $\sin(2460°) = \sin(6 \times 360° + 300°) = \sin(300°)$

$= \sin(360° - 60°)$

$= -\sin 60°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) $\cos(-870°) = \cos(870°) = \cos(2 \times 360° + 150°)$

$= \cos 150 = \cos(180° - 30°)$

$= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\sin(-780°) = -\sin 780°$

$= -\sin(2 \times 360° + 60°)$

$= -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(vi) $\cot(-855°) = -\cot(855°) = -\cot(2 \times 360° + 135°)$

$= -\cot(135°) = -\cot(180° - 45°)$

$= \cot 45° = 1$

(vii) $\operatorname{cosec}(2040°) = \operatorname{cosec}(5 \times 360° + 240°) = \operatorname{cosec}(240°)$

$= \operatorname{cosec}(180° + 60°) = -\operatorname{cosec}(60°)$

$= -\frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $\sec(-1305°) = \sec(1305°) = \sec(3 \times 360° + 225°)$

$= \sec(225°) = \sec(270° - 45°)$

$= -\operatorname{cosec} 45° = -\sqrt{2}$

எ.கா. 6.6: *சுருக்குக* : $\frac{\cot(90° - \theta)\ \sin(180° + \theta)\ \sec(360° - \theta)}{\tan(180° + \theta)\ \sec(-\theta)\ \cos(90° + \theta)}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோவை $= \frac{\tan\theta\,(-\sin\theta)\,(\sec\theta)}{\tan\theta\,(\sec\theta)\,(-\sin\theta)}$

$= 1$

எ.கா. 6.7:

அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல் நிறுவுக

$\sin 780° \ \sin 480° + \cos 120° \cos 60° = \frac{1}{2}$

தீர்வு : $\sin 780° = \sin(2 \times 360° + 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 480° = \sin(360° + 120°)$

$= \sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ R.H.S.}$$

6.2.5 திரிகோணமிதி சார்புகளின் சிறப்புப் பண்புகள் : (Special properties of Trigonometrical functions)

சீர் சுழல் சார்புகள் (Periodic function) :

$f(x + \alpha) = f(x)$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு சீர்சுழல் சார்பு எனப்படும். αன் மீச்சிறு மிகை மதிப்பு இச்சார்பின் சுழற்சி (period) எனப்படும். எல்லா திரிகோணமிதிச் சார்புகளும் சீர்சுழல் சார்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\sin(x + 4\pi) = \sin x$; $\sin(x + 6\pi) = \sin x$

$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, n \in Z$

இங்கு $\alpha = \ldots\ldots -6\pi, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$. ஆனால் அடிப்படை சுழற்சி ஒரு மீச்சிறு மிகைமதிப்பாகும். எனவே $\alpha = 2\pi$ என்பது அடிப்படை சுழற்சி (fundamental period) எனப்படும்.

எனவே sin சார்பு 2πஐ சுழற்சியாகக் கொண்ட ஒரு சீர் சுழல் சார்பாகும். இதேபோல் $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$ மற்றும் $\sec x$ன் சுழற்சி 2π என நிறுவலாம். $\tan x$ மற்றும் $\cot x$ன் சுழற்சி π ஆகும்.

6.2.6 ஒற்றை மற்றும் இரட்டைச் சார்புகள் (Odd and even functions):

$f(x) = f(-x)$ எனில் $f(x)$ ஆனது ஒரு இரட்டை சார்பெனவும்

$f(-x) = -f(x)$ எனில் $f(x)$ ஆனது ஒரு ஒற்றை சார்பெனவும் நமக்குத் தெரியும்.

$f(x) = \sin x$; $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ i.e. $f(x) = -f(-x)$ $\therefore$ $\sin x$ என்பது ஒரு ஒற்றைச் சார்பு. இதே போன்று $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$ மற்றும் $\cot x$ என்பவைகள் ஒற்றைச் சார்புகள் என நிறுவலாம்.

$f(x) = \cos x$ என்க ; $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. $\therefore$ $\cos x$ ஒரு இட்டைச் சார்பு. இதே போல $\sec x$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு என நிறுவலாம்.

குறிப்பு : ஒற்றைச் சார்பு, இரட்டைச் சார்பு ஆகியவைகள் பற்றி விளக்கமாக 7ஆம் அத்தியாயத்தில் படிக்கலாம்.

பயிற்சி 6.2

(1) $\sin\theta = \frac{11}{12}$ எனில்,

$\sec(360° - \theta) . \tan(180° - \theta) + \cot(90° + \theta)\sin(270° + \theta)$ன் மதிப்பு காண்க.

(2) கீழ்க்காண்பவைகளை மிகை குறுங்கோணங்களின் சார்பாக எழுதுக.

(i) $\sin(-840°)$ (ii) $\cos(1220°)$ (iii) $\cot(-640°)$ (iv) $\tan(300°)$

(v) $\mathrm{cosec}(420°)$ (vi) $\sin(-1110°)$ (vii) $\cos(-1050°)$

(3) நிறுவுக $\frac{\sin 300° . \tan 330° . \sec 420°}{\cot 135° . \cos 210° . \mathrm{cosec}\, 315°} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

(4) நிறுவுக $\left\{1+\cot\alpha - \sec\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right\}\left\{1 + \cot\alpha + \sec\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = 2\cot\alpha$

(5) கீழ்க்காண்பவைகளை Aன் சார்புகளாக எழுதுக :

(i) $\sec\left(A - \frac{3\pi}{2}\right)$ (ii) $\mathrm{cosec}\left(A - \frac{\pi}{2}\right)$ (iii) $\tan\left(A - \frac{3\pi}{2}\right)$

(iv) $\cos(720° + A)$ (v) $\tan(A + \pi)$

(6) நிறுவுக $\frac{\sin(180°+A) . \cos(90°-A) . \tan(270°-A)}{\sec(540° - A)\cos(360°+A)\,\mathrm{cosec}(270°+A)} = -\sin A\cos^2 A$

(7) நிறுவுக $\sin\theta . \cos\theta\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) . \mathrm{cosec}\,\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta\right\} = 1$

(8) மதிப்பு காண்க :-

(i) $\cos(135°)$ (ii) $\sin(240°)$ (iii) $\sec(225°)$ (iv) $\cos(-150°)$

(v) $\cot(315°)$ (vi) $\mathrm{cosec}(-300°)$ (vii) $\cot\frac{5\pi}{4}$ (viii) $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

(9) A, B, C, D என்பவைகள் ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் கோணங்கள் எனில் $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ என நிறுவுக.

(10) கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்பு காண்க:

(i) $\tan^2 30° + \tan^2 45° + \tan^2 60°$ (ii) $\sin\frac{\pi}{6} . \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} . \sin\frac{\pi}{3}$

(iii) $\cos\frac{\pi}{6} . \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} . \sin\frac{\pi}{3}$ (iv) $\cos 45° . \cos 60° - \sin 45° . \sin 60°$

(v) $\tan^2 60° + 2\tan^2 45°$ (vi) $\tan^2 45° + 4\cos^2 60°$

(vii) $\cot 60° . \tan 30° + \sec^2 45° . \sin 90°$

(viii) $\tan^2 60° + 4 \cot^2 45° + 3 \sec^2 30° + \cos^2 90°$

(ix) $\tan^2 30° + 2 \sin 60° + \tan 45° - \tan 60° + \cos^2 30°$

(x) $\frac{1}{2} \sin^2 60° - \frac{1}{2} \sec 60° \tan^2 30° + \frac{4}{5} \sin^2 45° . \tan^2 60°$

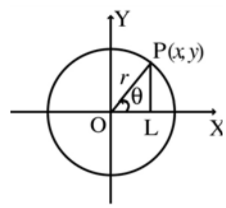
(11) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ மேலும் $\tan\theta > 0$ எனில் $\frac{5\tan\theta + 4\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta - 3\sin\theta} = 3$ என நிறுவுக.

6.2.7 திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள் (Trigonometrical identities):

மாறிகளின் பெருக்கல் $x.x = x^2$ என்பதைப் போல $\sin\theta . \sin\theta = (\sin\theta)^2$ என வரும். இதனை $\sin^2\theta$ என எழுதலாம். இதே போன்று $\tan\theta, \tan^2\theta = \tan^3\theta$. இப்போது நாம் சில அடிப்படை திரிகோணமிதி முற்றொருமைகளை நிரூபிப்போம்.

ஆதியை மையமாகக் கொண்ட ஓரலகு வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். $P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $\angle XOP = \theta$.

OXக்கு செங்குத்தாக PL வரைக. முக்கோணம் OLP ஒரு செங்கோண முக்கோணம். இதில் OP (கர்ணம்) $= r = 1$ அலகு. x, y என்பவைகள் அடுத்துள்ள பக்கத்தையும் எதிர்பக்கத்தையும் குறிக்கின்றன.



படம் 6. 17

இப்போது $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$ மேலும் $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$; $\tan\theta = \frac{y}{x}$

மேலும் $r^2 = x^2 + y^2 = 1$

முக்கோணம் OLPயிலிருந்து $x^2 + y^2 = r^2 = 1$

அ.து. $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = \text{cosec}^2\theta$$

எனவே நமக்குக் கிடைத்த முற்றொருமைகள்

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$$

∴ இவைகளிலிருந்து நமக்கு கிடைப்பது

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

எ.கா. 6.8: $\cos^4 A - \sin^4 A = 1 - 2\sin^2 A$

தீர்வு : $\cos^4 A - \sin^4 A = (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$$
$$= 1 - 2\sin^2 A$$

எ.கா. 6.9: $\sec^2 A + \text{cosec}^2 A = \sec^2 A \, . \, \text{cosec}^2 A$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\sec^2 A + \text{cosec}^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 A}$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \, . \, \sin^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A \, . \, \sin^2 A}$$
$$= \sec^2 A \, . \, \text{cosec}^2 A$$

எ.கா. 6.10: $\cos A \sqrt{1 + \cot^2 A} = \sqrt{\text{cosec}^2 A - 1}$ *என நிறுவுக*

தீர்வு : $\cos A \sqrt{1 + \cot^2 A} = \cos A \sqrt{\text{cosec}^2 A} = \cos A \, . \, \text{cosec} A$

$$= \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A = \sqrt{\text{cosec}^2 A - 1}$$

எ.கா. 6.11: $a \sin^2\theta + b\cos^2\theta = c$ *எனில்* $\tan^2\theta = \dfrac{c - b}{a - c}$ *என நிறுவுக*

தீர்வு : $a \sin^2\theta + b \cos^2\theta = c$

இருபுறமும் $\cos^2\theta$*ல் வகுக்க,* $a \tan^2\theta + b = c \sec^2\theta$

$$a \tan^2\theta + b = c(1 + \tan^2\theta)$$
$$\tan^2\theta\,(a - c) = c - b$$
$$\therefore \tan^2\theta = \frac{c - b}{a - c}$$

எ.கா. 6.12: $\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \text{cosec} A - \cot A$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ *ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.*

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A} = \left(\frac{1 - \cos A}{\sin A}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$
$$= \operatorname{cosec} A - \cot A$$

எ.கா. 6.13:

If $x = a\cos\theta + b\sin\theta$ மேலும் $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ எனில்
$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :
$$x^2 + y^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2$$
$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta$$
$$+ a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= a^2 + b^2$$

எ.கா. 6.14: $\sin^2 A.\tan A + \cos^2 A\ .\ \cot A + 2\ \sin A\ .\ \cos A = \tan A + \cot A$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :
இடப்பக்கம் $= \sin^2 A . \frac{\sin A}{\cos A} + \cos^2 A . \frac{\cos A}{\sin A} + 2\sin A\cos A$
$$= \frac{\sin^3 A}{\cos A} + \frac{\cos^3 A}{\sin A} + 2\sin A . \cos A$$
$$= \frac{\sin^4 A + \cos^4 A + 2\sin^2 A . \cos^2 A}{\sin A . \cos A}$$
$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\sin A . \cos A} = \frac{1}{\sin A . \cos A}$$
$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A . \cos A} \qquad \left[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1\right]$$
$$= \frac{\sin^2 A}{\sin A\cos A} + \frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$
$\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \tan A + \cot A =$ வலப்பக்கம்

எ.கா. 6.15: $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $(\sin x - \cos x)^4 = \left[(\sin x - \cos x)^2\right]^2 = [\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x]^2$
$$= [1 - 2\sin x\cos x]^2$$
$$= 1 - 4\sin x\cos x + 4\sin^2 x\cos^2 x \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$
$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x . \cos x$$
$$= 1 + 2\sin x\cos x \qquad \ldots\ldots \text{(ii)}$$
$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \, . \cos^2 x \, (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= 1 - 3\sin^2 x \ \cos^2 x$ …… (iii)

(i), (ii), (iii) லிருந்து இடப்பக்கம்

$= 3(1 - 4\sin x \cos x + 4\sin^2 x \, . \cos^2 x)$

$+ 6(1 + 2\sin x \ \cos x) + 4(1 - 3 \sin^2 x \ \cos^2 x)$

$= 3 + 6 + 4$

$= 13 =$ வலப்பக்கம்

எ.கா. 6.16: $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ *என நிறுவுக*

தீர்வு : இடப்பக்கம் $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$= \dfrac{(\tan\theta + \sec\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)} = \tan\theta + \sec\theta$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} =$ வலப்பக்கம்

பயிற்சி 6.3

(1) *கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.*

(i) $\sin^4 A - \cos^4 A = 1 - 2\cos^2 A$

(ii) $\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(1 + \sin A \ \cos A)$

(iii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$

(iv) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta$

(v) $\dfrac{1}{1 + \sin\theta} + \dfrac{1}{1 - \sin\theta} = 2\sec^2\theta$ (vi) $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} = (\sec x + \tan x)^2$

(vii) $\dfrac{\mathrm{cosec}\ \theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos\theta$ (viii) $\dfrac{1}{\tan\theta + \sec\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

(ix) $\dfrac{1}{\mathrm{cosec}\theta - \cot\theta} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$

(x) $(\sec\theta + \cos\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta + \sin^2\theta$

(2) $\tan\theta + \sec\theta = x$ *எனில்,* $2\tan\theta = x - \dfrac{1}{x}$, $2\sec\theta = x + \dfrac{1}{x}$ *என நிறுவி,*

அதிலிருந்து $\sin\theta = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ *என நிறுவுக.*

(3) $\tan\theta + \sin\theta = p$, $\tan\theta - \sin\theta = q$ மேலும் $p > q$ எனில் $p^2 - q^2 = 4\sqrt{pq}$ என நிறுவுக.

(4) $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A) = \dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}$ என நிறுவுக.

(5) $\dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$ என நிறுவுக.

(6) கீழ்க்கண்டவைகளை நிறுவுக.

(i) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$ $(\sin A \neq 1)$ (ii) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ $(\cos A \neq 1)$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(7) $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ எனில், $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ என நிறுவுக.

(8) $(1 + \tan A + \sec A)(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A) = 2$ என நிறுவுக.

6.3 கூட்டுக்கோணங்கள் (Compound Angles)

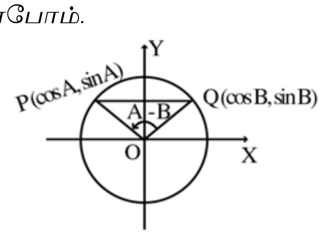
6.3.1 கூட்டுக்கோணங்கள் A + B *மற்றும்* A – B

இதற்கு முந்தைய அத்தியாயத்தில் $90° \pm \theta$, $180° \pm \theta$, … என்ற கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்களைக் கண்டோம். அவைகளில் ஒரே ஒரு கோணம் மட்டும் இருந்தது. இந்த அத்தியாயத்தில் A + B, A – B, … என்ற கூட்டுக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்களைA, B, ….ன் மூலம் காணப்போகிறோம்.

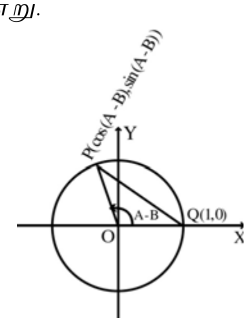
$f(x + y) = f(x) + f(y)$ என்பது எல்லா மெய்மாறிச் சார்புகளுக்கும் பொருந்தாது. எடுத்துக்காட்டாக எல்லா திரிகோணமிதி விகிதங்களும் மேற்கண்ட தொடர்பை திருப்தி செய்யாது.

$\cos(A + B)$ என்பது $\cos A + \cos B$க்கு சமமன்று.

இப்போது $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ என்ற முற்றொருமையைக் காண்போம்.



படம். 6. 18



படம். 6. 19

P, Q என்பவை 1 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் என்க. $\angle XOP = A$ and $\angle XOQ = B$. P, Q ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே (cos A, sinA) மற்றும் (cosB, sinB)

$$PQ^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$

$$= (\cos^2 A - 2\cos A \cos B + \cos^2 B) + (\sin^2 A - 2\sin A \sin B + \sin^2 B)$$

$$= (\cos^2 A + \sin^2 A) + (\cos^2 B + \sin^2 B) - 2\cos A \cos B - 2\sin A\cos B$$

$$= 1+1 - 2\cos A \cos B - 2\sin A \sin B = 2 - 2(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \quad \ldots (1)$$

மேற்கண்ட அலகு வட்டத்தைச் சுழற்றி Q என்ற புள்ளியானது (1, 0) ஐ அடைவதாக எடுத்துக் கொள்வோம். இதனால் PQ ன் நீளம் மாறாது.

$$PQ^2 = [\cos(A - B) - 1]^2 + [\sin(A - B) - 0]^2$$

$$= [\cos^2(A - B) - 2\cos(A - B) + 1] + \sin^2(A - B)$$

$$= [\cos^2(A - B) + \sin^2(A - B)] + 1 - 2\cos(A - B) = 1 + 1 - 2\cos(A - B)$$

$$= 2 - 2\cos(A - B) \quad \ldots (2)$$

(1), (2) லிருந்து, $2 - 2\cos(A - B) = 2 - 2(\cos A\cos B + \sin A \sin B)$

$$\Rightarrow \quad \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

அடுத்தபடியாக cos(A + B) ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

cos(A + B) என்பது $\cos[A - (-B)]$க்குச் சமமானது.

$$\cos(A + B) = \cos A \cos(-B) + \sin A \cdot \sin(-B)$$

ஆனால் $\cos(-B) = \cos B$ and $\sin(-B) = -\sin B$

$$\therefore \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

sin(A + B)ன் முற்றொருமையைக் காண கீழ்க்கண்டவற்றை நாம் நினைவுகூர்வோம்.

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

இந்த முற்றொருமையில் θக்கு A + B எனப்பிரதியிட

$$\sin(A + B) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A + B)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right]$$

கொசைன் வித்தியாச முற்றொருமையைப் பயன்படுத்த

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) . \cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) . \sin B$$

$$= \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$$

ஆகவே $\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A \ \sin B$

Sine வித்தியாச முற்றொருமையைக் காண Bக்கு பதிலாக – B பிரதியிட வேண்டும்.

$$\sin(A-B) = \sin\left[A+(-B)\right]$$
$$= \sin A\cos(-B) + \cos A\ .\ \sin(-B)$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

Tan சார்புக்குரிய கூட்டல் முற்றொருமையைக் காண sine, cosine, முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$
$$= \frac{\sin A\ .\ \cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B}$$

பகுதி, தொகுதிகளை cosA cosBஆல் வகுக்க

$$= \frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} + \dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\ .\ \tan B}$$

இதேபோன்று, tan சார்புக்குரிய வித்தியாசத்திற்கான முற்றொருமையைக் காணலாம்.

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\ .\ \tan B}$$

(1) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(2) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(3) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(4) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(5) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

(6) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\ .\ \tan B}$

எ.கா.6.17: (i)cos 15° (ii)cos105° (iii)sin 75° (iv)tan 15°-ன் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு :

(i) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ\ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(ii) $\cos105° = \cos(60° + 45°) = \cos60° \cos45° - \sin60° \sin45°$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(iii) $\sin75° = \sin(45° + 30°) = \sin45° \cos30° + \cos45° \sin30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(iv) $\tan15° = \tan(45° - 30°) = \dfrac{\tan45° - \tan30°}{1 + \tan45° \tan30°} = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

எ.கா. 6.18: A, B *என்பவைகள் குறுங்கோணங்கள்* $\sin A = \frac{3}{5}$; $\cos B = \frac{12}{13}$ *எனில்* $\cos(A + B)$-*ன் மதிப்பைக் காண்க.*

தீர்வு :

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \cos(A + B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{33}{65}$$

எ.கா. 6.19: (i) $\sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ *என நிறுவுக.*

$$\begin{aligned}
\sin(A + B) \sin(A - B) &= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\
&= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \\
&= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B \\
&= \sin^2 A - \sin^2 B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(A + B) \cos(A - B) &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \\
&= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B \\
&= \cos^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A) \sin^2 B \\
&= \cos^2 A - \sin^2 B
\end{aligned}$$

எ.கா. 6.20: A + B = 45° எனில் (1 + tanA) (1 + tanB) = 2 என்று நிறுவுக. இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}°$ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A + B = 45° \Rightarrow \tan(A + B) = \tan 45°$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = 1$$

$$\tan A + \tan B = 1 - \tan A \cdot \tan B$$

$$1 + \tan A + \tan B = 2 - \tan A \tan B \quad \text{(இருபுறமும்1-ஐக் கூட்ட)}$$

$$1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 2$$

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

A = B எனில் $2A = 45° \Rightarrow A = 22\frac{1}{2} = B$

$$\therefore \left(1 + \tan 22\frac{1}{2}°\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 + \tan 22\frac{1}{2}° = \pm\sqrt{2}$$

$$\therefore \tan 22\frac{1}{2}° = \pm\sqrt{2} - 1$$

$22\frac{1}{2}°$ ஒரு குறுங்கோணம். எனவே $\tan 22\frac{1}{2}°$ ஒரு மிகை எண். எனவே

$\tan 22\frac{1}{2}° = \sqrt{2} - 1$

எ.கா. 6.21: நிறுவுக

(i) $\dfrac{\tan 69° + \tan 66°}{1 - \tan 69° \ \tan 66} = -1$ (ii) $\dfrac{\tan(A - B) + \tan B}{1 - \tan(A - B)\tan B} = \tan A$

(iii) $\dfrac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°} = \tan 62°$

தீர்வு :

(i) $\dfrac{\tan 69° + \tan 66°}{1 - \tan 69° \ \tan 66°} = \tan(69° + 66°)$

$= \tan(135°) = \tan(90° + 45°) = -\cot 45° = -1$

(ii) $\dfrac{\tan(A - B) + \tan B}{1 - \tan(A - B)\tan B} = \tan\left[(A - B) + B\right] = \tan A$

(iii) இடப்பக்கம் $= \dfrac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°}$

தொகுதியையும் பகுதியையும் cos17°ஆல் வகுக்க,

இடப்பக்கம் $= \dfrac{1 + \tan 17°}{1 - \tan 17°} = \dfrac{\tan 45° + \tan 17°}{1 - \tan 45° \ \tan 17°}$ $(\because \tan 45° = 1)$

$= \tan(45° + 17°) = \tan 62° =$ வலப்பக்கம்

எ.கா. 6.22: *நிறுவுக* (i) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \ \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = 1$

(ii) If $\tan A = 3$ and $\tan B = \dfrac{1}{2}$, prove that $A - B = \dfrac{\pi}{4}$

தீர்வு :

(i) இடப்பக்கம் $= \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \ \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$

$= \left(\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}\right)\left(\dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right) = 1$ வலப்பக்கம் $\left(\because \tan\dfrac{\pi}{4} = 1\right)$

(ii) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \ \tan B} = \dfrac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$

$\tan(A - B) = \tan\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow A - B = \dfrac{\pi}{4}$

எ.கா. 6.23:

$\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{4}{5}$ *மேலும்* $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{5}{13}$ *எனில்* $\tan 2\alpha$*ன் மதிப்பு காண்க.*

இங்கு $(\alpha + \beta), (\alpha - \beta)$ *என்பவைகள் குறுங்கோணங்கள்.*

தீர்வு :

$\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{3}{4}$

$\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{5}{13} \Rightarrow \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{5}{12}$

$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$

$\therefore \tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$

$= \dfrac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan(\alpha - \beta)} = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} = \dfrac{\frac{14}{12}}{\frac{11}{16}} = \dfrac{56}{33}$

எ.கா. 6.24 : $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan A \ \tan 2A \ \tan 3A$ *என நிறுவுக*

தீர்வு :

$\tan 3A = \tan(A + 2A) = \dfrac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \ \tan 2A}$

i.e. $\tan 3A\,(1 - \tan A\ \tan 2A) = \tan A + \tan 2A$

i.e. $\tan 3A - \tan A\ \tan 2A\ \tan 3A = \tan A + \tan 2A$

$\therefore\quad \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan A\ \tan 2A\ \tan 3A$

பயிற்சி 6.4

(1) *மதிப்பு காண்க* (i) $\sin 15°$ (ii) $\cos 75°$ (iii) $\tan 75°$ (iv) $\sin 105°$

(2) *நிறுவுக.*

(i) $\sin(45°+A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A+\cos A)$ (ii) $\cos(A+45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

(3) *நிறுவுக* ,

(i) $\sin(45° + A) - \cos(45° + A) = \sqrt{2}\ \sin A$

(ii) $\sin(30° + A) + \sin(30° - A) = \cos A$

(4) *நிறுவுக* (i) $\cos(A + B)\ \cos(A - B) = \cos^2 B - \sin^2 A$

(ii) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A$

(5) $\cos^2 15° + \cos^2 45° + \cos^2 75° = \frac{3}{2}$ *என நிறுவுக*

(6) *நிறுவுக* (i) $\sin A + \sin(120° + A) + \sin(240° + A) = 0$

(ii) $\cos A + \cos(120° + A) + \cos(120° - A) = 0$

(7) *நிறுவுக*

(i) $\cos 15° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\tan 15° + \cot 15° = 4$ (iii) $\cot 75° + \tan 75° = 4$

(8) (i) $\sin 45° + \sin 30°$*ன் மதிப்பு கண்டு* $\sin 75°$*ன் ஒப்பிடு.*

(ii) $\cos 45° - \cos 30°$*ன் மதிப்பு கண்டு* $\cos 15°$*ன் ஒப்பிடுக.*

(9) *நிறுவுக*

(i) $\tan 70° = 2\tan 50° + \tan 20°$

(ii) $\tan 72° = \tan 18° + 2\tan 54°$ (*பயன்படுத்துக*: $\tan A\ \tan B = 1,\ \because A+B = 90°$)

(iii) $\frac{\cos 11° + \sin 11°}{\cos 11° - \sin 11°} = \tan 56°$ (iv) $\frac{\cos 29° + \sin 29°}{\cos 29° - \sin 29°} = \tan 74°$

(10) *நிறுவுக* $\frac{\sin(A - B)}{\sin A\ \sin B} + \frac{\sin(B - C)}{\sin B\ \sin C} + \frac{\sin(C - A)}{\sin C\ \sin A} = 0$

(11) (i) $\tan A = \frac{5}{6}$, $\tan B = \frac{1}{11}$ *எனில்* $A + B = 45°$*என நிறுவுக.*

(ii) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ மேலும் $\tan\beta = \frac{1}{3}$ *எனில்* $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ *என நிறுவுக.*

(12) $A + B = 45°$ எனில் $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\cot 22\frac{1}{2}^{\circ}$ ன் மதிப்பு காண்.

(13) $A + B + C = \pi$ எனில்

(i) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(ii) $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$ என நிறுவுக.

(14) $\sin A = \frac{1}{3}, \sin B = \frac{1}{4}$ எனில் $\sin(A + B)$ன் மதிப்பு காண்க. A, Bஎன்பவைகள் குறுங்கோணம்.

(15) (i) $\sin(A + 60°) + \sin(A - 60°) = \sin A$

(ii) $\tan 4A \tan 3A \tan A + \tan 3A + \tan A - \tan 4A = 0$ என நிறுவுக.

6.3.2 மடங்கு கோணங்களின் முற்றொருமைகள் :

(Multiple angle identities)

sin2A, cos2A, tan2A என்பனவற்றை உள்ளடக்கிய முற்றொருமைகள் மடங்கு கோணங்களின் முற்றொருமைகள் எனப்படும். இந்த முற்றொருமைகளைக் காண, முன் அத்தியாயத்தில் கண்ட சில முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தப் போகிறோம்.

முதலில் sin2Aன் முற்றொருமையைக் காண்போம்.

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ என்பதை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $B = A$ எனப் பிரதியிட

$$\sin 2A = \sin(A + A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos A$$

எனவே $\boxed{\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A}$

cos2A, tan2A உள்ளடங்கிய முற்றொருமைகளை மேற்கண்டவாறு காணலாம்.

$$\cos 2A = \cos(A + A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

எனவே $\boxed{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A}$

இதே போன்று $\boxed{\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}$ என அடையலாம்.

cos2Aன் மற்ற முற்றொருமைகளைக் கீழ்க் காண்போம்.

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$லிருந்து நமக்கு

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

மேலும், $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$லிருந்து

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

எனவே, $$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$= \frac{2\sin A}{\cos A} \cos^2 A = \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A \left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$= \cos^2 A (1 - \tan^2 A)$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{\sec^2 A} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

ஆகவே

$$\sin 2A = 2\sin A \,.\, \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

6.3.3 $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}$ ன் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் வாயிலாக **A***ன் திரிகோணமிதி விகிதங்களைக் காணல்* **:**

(Trigonometrical ratios of A in terms of trigonometrical ratios of $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}$)

$$\sin A = \sin\left(2 \times \frac{A}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \, . \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos A = \cos\left(2 \times \frac{A}{2}\right) = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\tan A = \tan\left(2 \times \frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$$

இதேபோன்று கீழ்க்கண்ட முற்றொருமைகளை நிறுவலாம்.

$$\sin A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$$

$$\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

மேலும் $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$ மற்றும் $\tan\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$ என்பதைக் கவனிக்க.

எ.கா. 6.25: $\sin\theta = \frac{3}{8}$, θ ஒரு குறுங்கோணம் எனில், $\sin 2\theta$ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $\sin\theta = \frac{3}{8}$; $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{3\sqrt{55}}{32}$$

எ.கா. 6.26: (i) $\sin 15°$ (ii) $\tan 15°$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

தீர்வு : (i) $\sin 15° = \sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(ii) $\tan 15° = \tan\frac{30°}{2} = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$

6.3.4 3Aஐ உள்ளடக்கிய திரிகோண மிதி விகிதங்கள் : (Trigonometrical ratios involving 3A)

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A \cdot \cos A + \cos 2A \cdot \sin A\\ &= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A\end{aligned}$$

இதேபோன்று $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$\begin{aligned}\tan 3A &= \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1-\tan 2A \cdot \tan A}\\ &= \frac{\left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right) + \tan A}{1-\tan A \cdot \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}\\ &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\end{aligned}$$

எ.கா. 6.27: $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ என நிறுவுக.

தீர்வு : *இடப்புறம்* $= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$

$= 1 . \cos 2A = \cos 2A =$ *வலப்புறம்*

எ.கா. 6.28:

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :

$$\text{வலப்புறம்} = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1} = \frac{\frac{1}{\tan^3 A} - \frac{3}{\tan A}}{\frac{3}{\tan^2 A} - 1} = \frac{1 - 3\tan^2 A}{3\tan A - \tan^3 A}$$

$$= \frac{1}{\tan 3A} = \cot 3A = \text{இடப்புறம்}$$

எ.கா. 6.29:

$\tan A = \dfrac{1 - \cos B}{\sin B}$ *எனில்,* $\tan 2A = \tan B$ *என நிறுவுக. இங்கு* A, B*என்பவைகள் குறுங்கோணங்கள்.*

தீர்வு: *வலப்புறம்* $= \dfrac{1 - \cos B}{\sin B} = \dfrac{2\sin^2 \frac{B}{2}}{2\sin \frac{B}{2} . \cos \frac{B}{2}} = \dfrac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \tan \dfrac{B}{2}$

எனவே $\tan \dfrac{B}{2} = \tan A$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2} \Rightarrow B = 2A$$

எனவே $\tan 2A = \tan B$

எ.கா. 6.30: $4 \sin A \sin (60° + A) . \sin (60° - A) = \sin 3A$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : *இடப்புறம்* $= 4 \sin A \sin (60° + A) . \sin (60° - A)$

$= 4\sin A \{ \sin (60° + A) . \sin (60° - A)\}$

$= 4\sin A \{\sin^2 60 - \sin^2 A\}$

$= 4\sin A \left\{\frac{3}{4} - \sin^2 A\right\} = 3\sin A - 4\sin^3 A = \sin 3A$

$=$ *வலப்புறம்*

எ.கா. 6.31: $\cos 20° \ \cos 40° \ \cos 80° = \dfrac{1}{8}$ *என நிறுவுக.*

இடப்புறம் $= \cos 20° \cos 40° \cos 80°$

$= \cos 20° \{\cos(60° - 20°) \cos(60° + 20°)\}$

$= \cos 20° [\cos^2 60° - \sin^2 20°]$

$= \cos 20° \left[\frac{1}{4} - \sin^2 20°\right]$

$= \frac{1}{4} \cos 20° \{1 - 4(1 - \cos^2 20°)\}$

$= \frac{1}{4} \{4\cos^3 20° - 3\cos 20°\} = \frac{1}{4} [\cos 3 \times 20°]$

$= \frac{1}{4} \times \cos 60° = \frac{1}{8}$ = வலப்புறம்

எ.கா. 6.32: *மதிப்பு காண்க*

(i) $\sin 18°$ (ii) $\cos 18°$ (iii) $\cos 36°$ (iv) $\sin 36°$ (v) $\sin 54°$ (vi) $\cos 54°$

தீர்வு :

(i) $\theta = 18°$ *என்க.* $5\theta = 90° \Rightarrow 2\theta = 90° - 3\theta$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 \quad (\because \cos\theta \neq 0)$

$\Rightarrow 2\sin\theta = 1 - 4\sin^2\theta$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

sin 18° is positive, $\sin 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

(ii) $\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

(iii) $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

(iv) $\sin 36° = \sqrt{1 - \cos^2 36°} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

(v) $\sin 54° = \sin(90° - 36°) = \cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

(vi) $\cos 54° = \cos(90° - 36°) = \sin 36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

பயிற்சி 6.5

(1) கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக

(i) $2\sin 15° \cos 15° = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\frac{\pi}{8} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ (iv) $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(v) $1 - 2\sin^2 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (vi) $\frac{2\tan 22\frac{1}{2}°}{1-\tan^2 22\frac{1}{2}°} = 1$

(2) $8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9} = 1$ என நிறுவுக

(3) $\tan\frac{\theta}{2} = (2-\sqrt{3})$ எனில் $\sin\theta$ன் மதிப்பு காண்க.

(4) $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ என நிறுவுக.

(5) நிறுவுக

(i) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \sin 2\theta$ (ii) $\sec 2\theta+\tan 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

(6) (i) $\tan\theta = 3$ எனில் $\tan 3\theta$ஐ காண்க

(ii) $\sin A = \frac{3}{5}$ எனில் $\sin 3A$ஐ காண்க.

(7) $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ மற்றும் $\tan\beta = \frac{1}{7}$ எனில் $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக

(8) $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ எனில் $\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ என நிறுவுக.

6.3.5 பெருக்கலை, கூட்டல் அல்லது கழித்தலின் வடிவமாக மாற்றுதல்: (Transformation of a product into a sum or difference)

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \quad \ldots (1)$$

மற்றும்

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \quad \ldots (2)$$

என்பது நமக்குத் தெரியும்

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B \quad \ldots (I)$$

(1)லிருந்து (2)ஐக் கழிக்க

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B \quad \ldots (II)$$

மேலும்

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \ldots (3)$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \ldots (4)$$

$(3) + (4) \Rightarrow \quad \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \quad \ldots (III)$

$(4) - (3) \quad \cos(A + B) - \cos(A - B) = -2\sin A \sin B \quad \ldots (IV)$

இப்போது $A + B = C$ மற்றும் $A - B = D$ என்க

$$2A = C + D \text{ (OR) } A = \frac{C + D}{2} \text{ and } 2B = C - D \text{ (OR) } B = \frac{C - D}{2}$$

எனவே A, Bன் மதிப்புகளை மேற்கண்ட சூத்திரத்தை I, II, III மற்றும் IVல் பிரதியிட

1) $\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C + D}{2} . \cos \frac{C - D}{2}$

2) $\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C + D}{2} . \sin \frac{C - D}{2}$

3) $\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C + D}{2} . \cos \frac{C - D}{2}$

4) $\cos D - \cos C = 2\sin \frac{C + D}{2} . \sin \frac{C - D}{2}$

எ.கா. 6.33: *கீழ்க்கண்டவைகளை கூட்டல் அல்லது கழித்தலாகக் கூறு*

(i) $2\sin 2\theta . \cos\theta$ (ii) $2 \cos 2\theta \cos\theta$ (iii) $2 \sin 3A . \sin A$

(iv) $\cos 7\theta . \cos 5\theta$ (v) $\cos \frac{3A}{2} . \cos \frac{5A}{2}$ (vi) $\cos 3\theta . \sin 2\theta$ (vii) $2\cos 3A . \sin 5A$

தீர்வு :

(i) $2 \sin 2\theta . \cos\theta = \sin(2\theta + \theta) + \sin (2\theta - \theta) = \sin 3\theta + \sin\theta$

(ii) $2 \cos 2\theta . \cos\theta = \cos(2\theta + \theta) + \cos (2\theta - \theta) = \cos 3\theta + \cos\theta$

(iii) $2 \sin 3A . \sin A = \cos(3A - A) - \cos(3A + A) = \cos 2A - \cos 4A$

(iv) $\cos 7\theta . \cos 5\theta = \frac{1}{2} [\cos(7\theta + 5\theta) + \cos(7\theta - 5\theta)] = \frac{1}{2} [\cos 12\theta + \cos 2\theta]$

(v) $\cos \frac{3A}{2} . \cos\frac{5A}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{3A}{2} + \frac{5A}{2}\right) + \cos \left(\frac{3A}{2} - \frac{5A}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2} [\cos 4A + \cos(-A)] = \frac{1}{2} [\cos 4A + \cos A]$

(vi) $\cos 3\theta . \sin 2\theta = \frac{1}{2} [\sin (3\theta + 2\theta) - \sin(3\theta - 2\theta)] = \frac{1}{2} [\sin 5\theta - \sin \theta]$

(vii) $2 \cos 3A . \sin 5A = \sin(3A + 5A) - \sin(3A - 5A) = \sin 8A - \sin(-2A)$

$= \sin 8A + \sin 2A$

எ.கா. 6.34: *கீழ்க்காண்பவைகளை பெருக்கலாகக் கூறு* :

(i) $\sin 4A + \sin 2A$ (ii) $\sin 5A - \sin 3A$ (iii) $\cos 3A + \cos 7A$

(iv) $\cos 2A - \cos 4A$ (v) $\cos 60° - \cos 20°$ (vi) $\cos 55° + \sin 55°$

தீர்வு :

(i) $\sin 4A + \sin 2A = 2\sin\left(\frac{4A + 2A}{2}\right)\cos\left(\frac{4A - 2A}{2}\right) = 2\sin 3A \cos A$

(ii) $\sin 5A - \sin 3A = 2\cos\left(\frac{5A + 3A}{2}\right)\sin\left(\frac{5A - 3A}{2}\right) = 2\cos 4A \sin A$

(iii) $\cos 3A + \cos 7A = 2\cos\left(\frac{3A + 7A}{2}\right)\cos\left(\frac{3A - 7A}{2}\right)$

$= 2\cos 5A \cos(-2A) = 2\cos 5A \cos 2A$

(iv) $\cos 2A - \cos 4A = -2\sin\left(\frac{2A + 4A}{2}\right)\sin\left(\frac{2A - 4A}{2}\right)$

$= -2\sin 3A \sin(-A) = 2\sin 3A \sin A$

(v) $\cos 60° - \cos 20° = -2\sin\frac{(60° + 20°)}{2}\sin\left(\frac{60° - 20°}{2}\right) = -2\sin 40° \sin 20°$

(vi) $\cos 55° + \sin 55° = \cos 55° + \cos(90° - 55°) = \cos 55° + \cos 35°$

$= 2\cos\frac{55° + 35°}{2}\cos\frac{55° - 35°}{2} = 2\cos 45° \cos 10°$

$= 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10° = \sqrt{2}\cos 10°$

எ.கா. 6.35: $\sin 20° \sin 40° \sin 80° = \frac{\sqrt{3}}{8}$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : *இடப்புறம்* $= \sin 20° \sin 40° \text{ in}80° = \sin 20° \frac{1}{2}\{\cos 40° - \cos 120°\}$

$= \frac{1}{2}\sin 20°\left\{\cos 40° + \frac{1}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\sin 20° \cos 40° + \frac{1}{4}\sin 20°$

$= \frac{1}{4}(\sin 60° - \sin 20°) + \frac{1}{4}\sin 20° = \frac{1}{4}\sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}$ = *வலப்புறம்*

எ.கா. 6.36: $4(\cos 6° + \sin 24°) = \sqrt{3} + \sqrt{15}$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :

இடப்புறம்$= 4(\cos 6° + \sin 24°) = 4(\sin 84° + \sin 24°)$ $[\because \cos 6° = \cos(90° - 84) = \sin 84°]$

$$= 4 \,.\, 2\sin\left(\frac{84° + 24°}{2}\right) \cos\left(\frac{84° - 24°}{2}\right)$$

$$= 8 \sin 54° \,.\, \cos 30° = 8\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{15} + \sqrt{3} = \text{வலப்புறம்}$$

எ.கா. 6.37:

(i) $\cos 20°+\cos 100° + \cos 140° = 0$ (ii) $\sin 50°-\sin 70°+\sin 10°= 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

(i) இடப்புறம் $= \cos 20° + (\cos 100° + \cos 140°)$

$$= \cos 20° + 2\cos\left(\frac{100 + 140°}{2}\right) . \cos\left(\frac{100 - 140°}{2}\right)$$

$$= \cos 20° + 2\cos 120° \cos(-20°) = \cos 20° + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cos 20°$$

$$= \cos 20° - \cos 20° = 0 = \text{வலப்புறம்}$$

(ii) இடப்புறம் $= \sin 50° - \sin 70° + \sin 10°$

$$= 2\cos\left(\frac{50 + 70°}{2}\right) . \sin\left(\frac{50 - 70°}{2}\right) + \sin 10°$$

$$= 2\cos 60° \,.\, \sin(-10°) + \sin 10° = 2 \times \frac{1}{2} (-\sin 10°) + \sin 10°$$

$$= -\sin 10° + \sin 10° = 0 = \text{வலப்புறம்}$$

6.3.6 நிபந்தனைக்குட்பட்ட முற்றொருமைகள் :

(Conditional Identities)

எ.கா. 6.38:

$A + B + C = \pi$ எனில் $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இடப்புறம் $= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B) \cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin(\pi - C) \cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin C \cos(A - B) + 2\sin C \cos C$

$= 2\sin C \{\cos(A - B) + \cos C\}$

$$= 2\sin C\left\{\cos(A - B) + \cos(180 - \overline{A + B})\right\}$$
$$= 2\sin C\,\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\} = 2\sin C\ \{2\sin A\ \sin B\}$$
$$= 4\sin A\sin B\sin C = \text{வலப்புறம்}$$

எ.கா. 6.39:

$A + B + C = 180°$ எனில் $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4\sin A\sin B\cos C$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இடப்புறம் $= \cos 2A + (\cos 2B - \cos 2C)$
$$= 1 - 2\sin^2 A + \{-2\sin(B + C)\sin(B - C)\}$$
$$= 1 - 2\sin^2 A - 2\sin(180° - A)\ \sin(B - C)$$
$$= 1 - 2\sin^2 A - 2\sin A\sin(B - C)$$
$$= 1 - 2\sin A\,[\sin A + \sin(B - C)]$$
$$= 1 - 2\sin A\,[\sin(B + C) + \sin(B - C)],\ [\because A = 180° - (B + C)]$$
$$= 1 - 2\sin A\,[2\sin B\ \cos C]$$
$$= 1 - 4\sin A\sin B\cos C = \text{வலப்புறம்}$$

எ.கா. 6.40: $A+B+C = \pi$ எனில் $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A\sin B\cos C$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இடப்புறம் $= \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = (1 - \sin^2 A) + \cos^2 B - \cos^2 C$
$$= 1 + (\cos^2 B - \sin^2 A) - \cos^2 C$$
$$= 1 + \cos(A + B)\,.\,\cos(A - B) - \cos^2 C$$
$$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) - \cos^2 C$$
$$= 1 - \cos C.\,\cos(A - B) - \cos^2 C$$
$$= 1 - \cos C\ [\cos(A - B) + \cos C]$$
$$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 1 - \cos C\,[2\sin A\sin B]$$
$$= 1 - 2\sin A\sin B\cos C = \text{வலப்புறம்}$$

பயிற்சி 6.6

(1) *பின்வருவனவற்றை கூட்டல் அல்லது கழித்தலாகக் கூறு*

(i) $2\sin 4\theta\ \cos 2\theta$ (ii) $2\cos 8\theta\ \cos 6\theta$ (iii) $2\cos 7\theta\ \sin 3\theta$

(iv) $2\sin 3A\ \sin A$ (v) $2\cos 6A\ \sin 3A$ (vi) $\cos 4\theta\ \sin 9\theta$

(vii) $\cos\frac{3A}{2}\ \sin\frac{A}{2}$ (viii) $\sin\frac{7A}{2}\ \cos\frac{5A}{2}$ (ix) $\cos\frac{5\theta}{3}\ \cos\frac{4\theta}{3}$

(2) பின்வருவனவற்றை பெருக்கலாகக் கூறு :

(i) $\sin 13A + \sin 5A$ (ii) $\sin 13A - \sin 5A$ (iii) $\cos 13A + \cos 5A$

(iv) $\cos 13A - \cos 5A$ (v) $\sin 52° - \sin 32°$ (vi) $\cos 51° + \cos 23°$

(vii) $\sin 80° - \cos 70°$ (viii) $\sin 50° + \cos 80°$ (ix) $\sin 20° + \cos 50°$

(x) $\cos 35° + \sin 72°$

(3) $\sin 20° \ \sin 40° \ \sin 60° \ \sin 80° = \dfrac{3}{16}$ என நிறுவுக.

(4) $\cos 20° \ \cos 40° \ \cos 60° \ \cos 80° = \dfrac{1}{16}$ என நிறுவுக.

(5) $\sin 50° - \sin 70° + \cos 80° = 0$ என நிறுவுக.

(6) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$ என நிறுவுக.

(7) (i) $\dfrac{\sin 3A - \sin A}{\cos A - \cos 3A} = \cot 2A$ (ii) $\dfrac{\cos 2A - \cos 3A}{\sin 2A + \sin 3A} = \tan\dfrac{A}{2}$ என நிறுவுக.

(8) $A + B + C = \pi$ எனில் $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C$ என நிறுவுக.

(9) $A + B + C = 180°$ எனில்
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$ என நிறுவுக.

(10) $A+B+C = \pi$ எனில் $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$ என நிறுவுக.

(11) $A + B + C = 90°$ எனில் $\dfrac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C} = \cot A \ \cot B$ என நிறுவுக.

(12) $A + B + C = \pi$ எனில் $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}$
$= 1 - 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ என நிறுவுக.

6.4 திரிகோணமிதி சமன்பாடுகள் :
(Trigonometrical Equations)

திரிகோணமிதி சார்புகளை உள்ளடக்கிய சமன்பாடு திரிகோணமிதி சமன்பாடு எனப்படும். $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\tan\theta = 0$, $\cos^2\theta - 2\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ என்பவைகள் திரிகோணமிதி சமன்பாடுகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். இந்த திரிகோணமிதி சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க நாம் θ என்ற மாறிக்கு பல மதிப்புகளிட்டு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்கிறோம்.

ஒரு கோணத்தின் எம்மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றனவோ அம்மதிப்புகள் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். ஒரு திரிகோணமிதி சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கலாம். ஒரு தீர்வில் உள்ள கோணத்தின் தனி மதிப்புகளில் (absolute value) எது குறைவானதோ அதுவே முதன்மை தீர்வு (principal solution) எனப்படும். திரிகோணமிதி சமன்பாடுகள் என்பவை திரிகோணமிதி முற்றொருமைகளிலிருந்து (Trigonometrical identities) வேறுபட்டவை. சில திரிகோணமிதி சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் இல்லாமலும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $\cos\theta = 4$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகள் இல்லை. 'n' என்ற முழு எண்ணை உள்ளடக்கிய கோவை திரிகோணமிதி சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு எனப்படும். இது அச்சமன்பாட்டின் எல்லாத் தீர்வுகளையும் தரும்.

6.4.1 $\sin\theta = 0$; $\cos\theta = 0$; $\tan\theta = 0$ ன் பொதுத்தீர்வுகள்

O(0,0) ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓரலகு ஆரமுடைய வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

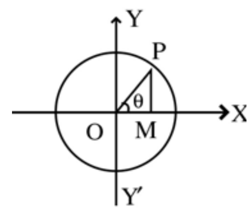
OXலிருந்து சுற்றும் கோடு OP ஆனது $\underline{|XOP} = \theta$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குகிறது. OXக்கு செங்குத்தாக PM வரைக.

(1) $\sin\theta = 0$

செங்கோண முக்கோணம் OMPல் OP = 1 அலகு

$\sin\theta = \dfrac{MP}{OP} \Rightarrow \sin\theta = MP$

$\sin\theta = 0$ எனில் $MP = 0$ அதாவது OP என்பது OX அல்லது OX′ மீது பொருந்தும்.



படம் 6.20

$\therefore \underline{|XOP} = \theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$[இடஞ்சுழியாக]

அல்லது $\theta = -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots\ldots$ [வலஞ்சுழியாக]

அதாவது $\theta = 0$ அல்லது πன் மிகை அல்லது குறை முழு எண் மடங்கு.

எனவே $\sin\theta = 0$ ன் பொதுத் தீர்வு $\theta = n\pi$, $n \in Z$ இங்கு Z என்பது முழு எண்களின் கணம்.

(2) $\cos\theta = 0$

செங்கோண முக்கோணம் OMPல் $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = OM$ ($\because OP = 1$அலகு)

$\cos\theta = 0$ எனில் $OM = 0$

அதாவது OP என்பது OY அல்லது OY′ மீது பொருந்தும்.

அதாவது $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{2}$, …. …. [இடஞ்சுழியாக)

$\theta = -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$ ……[வலஞ்சுழியாக]

அதாவது $\theta = \pm$ ($\frac{\pi}{2}$ ன் ஒற்றை மடங்கு)

ஆகவே θன் பொதுத்தீர்வு $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

(3) $\tan\theta = 0$

செங்கோண முக்கோணம் OMPல் $\tan\theta = 0$ எனில் $\frac{MP}{OM} = 0$ அல்லது MP $= 0$ இது, நிலை (1)-ஐப் போன்றுள்ளதால்

(1)லிருந்து $\theta = n\pi$, $n \in Z$ எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறாக, (1) $\sin\theta = 0$ எனில் $\theta = n\pi$, $n \in Z$

(2) $\cos\theta = 0$ எனில் $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

(3) $\tan\theta = 0$ எனில் $\theta = n\pi$, $n \in Z$

ஒரு திரிகோணமிதிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்போது கிடைக்கும் எல்லா தீர்வுகளிலும் சைன் சார்புக்கு $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$யிலும் கொசைன் தீர்வுக்கு $[0, \pi]$யிலும் டேன் சார்புக்கு $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$யிலும் உள்ள தீர்வு அச்சார்பின் முதன்மை மதிப்பு (Principal value) ஆகும்.

எ.கா. 6.41: *கீழ்க்கண்டவைகளின் முதன்மை மதிப்பைக் காண்க :*

(i) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\text{cosec}\,\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

(iv) $\cot\theta = -1$ (v) $\tan\theta = \sqrt{3}$

தீர்வு : (i) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

∴ xன் மதிப்பு முதல் அல்லது நான்காவது கால் பகுதியில் அமைகிறது. xன் முதன்மை மதிப்பு $[0, \pi]$க்குள் இருக்க வேண்டும். $\cos x$ என்பது மிகையாக இருப்பதால் அதன் முதன்மை மதிப்பு முதல் கால்பகுதியில் அமையும்.

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ மேலும் $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$

எனவே xன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$.

(ii) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$\cos\theta$ என்பது குறை எண்ணாக இருப்பதால் θ என்பது இரண்டு அல்லது மூன்றாவது கால்பகுதியில் அமைகிறது, இதன் முதன்மை மதிப்பு $[0,\pi]$ல் i.e. முதல் அல்லது இரண்டாவது கால் பகுதியில் அமைய வேண்டும். எனவே θன் முதன்மை மதிப்பு இரண்டாவது கால்பகுதியில் அமையும்.

$\therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(180° - 30°) = \cos 150°$.

θன் முதன்மை மதிப்பு $\theta = 150° = \frac{5\pi}{6}$.

(iii) $\text{cosec}\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

எனவே θ மூன்றாவது அல்லது நான்காவது கால்பகுதியில் அமையும். முதன்மை மதிப்பு $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ல் அதாவது முதல் அல்லது நான்காவது கால்வட்டத்தில் அமையவேண்டும். $\therefore \theta = -\frac{\pi}{3}$

(iv) $\cot\theta = -1 \quad \therefore \tan\theta = -1 < 0$

$\therefore$ θன் மதிப்பு இரண்டு அல்லது நான்காவது கால்வட்டத்தில் அமைகிறது. முதன்மை மதிப்பு $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$யில் அமைகிறது. $\therefore$ θன் மதிப்பு நான்காவது கால்பகுதியில் அமைகிறது.

$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

6.4.2 $\sin\theta = \sin\alpha$; $\cos\theta = \cos\alpha$; $\tan\theta = \tan\alpha$ன் ***பொதுத்தீர்வுகள்* :**

(1) $\sin\theta = \sin\alpha$; $\quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ i.e. $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) . \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0 \text{ or } \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ or } \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi, \quad n \in Z$$

$\Rightarrow \theta + \alpha =$ (πன் ஒற்றை மடங்கு) அல்லது

$\theta - \alpha$ = (πன் இரட்டை மடங்கு)

$\Rightarrow$ θ = (πன் ஒற்றை மடங்கு) $- \alpha$ … (1)

அல்லது θ = (πன் இரட்டை மடங்கு) $+ \alpha$ …(2)

(1)ஐயும் (2)ஐயும் ஒன்றுசேர்த்து,

$$\theta = n\pi + (-1)^n.\alpha, \text{ இங்கு } n \in Z$$

(2) $\cos\theta = \cos\alpha$ $\quad 0 \le \alpha \le \pi$ i.e. $\alpha \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow -2\sin\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) . \sin\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) = 0$ அல்லது $\sin\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\theta + \alpha}{2} = n\pi ; n \in Z$ அல்லது $\frac{\theta - \alpha}{2} = n\pi ; n \in Z$

$\Rightarrow \theta = 2n\pi - \alpha$ அல்லது $\theta = 2n\pi + \alpha$

எனவே $\theta = 2n\,\pi \pm \alpha$ ‘ $n \in Z$.

(3) $\tan\theta = \tan\alpha$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i.e. $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \sin(\theta - \alpha) = 0$

$\Rightarrow \theta - \alpha = n\pi, n \in Z$

$\Rightarrow \theta = n\pi + \alpha, n \in Z$

இவ்வாறாக $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \alpha ; n \in Z$

$\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha ; n \in Z$

$\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha ; n \in Z$, என அடைகிறோம்.

எ.கா. 6.42: கீழ்க்காண்பவைகளின் பொதுத்தீர்வு காண்க :

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sec\theta = -\sqrt{2}$ (iii) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$ (iv) $\cot^2\theta = 3$ (v) $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

தீர்வு : (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ இது $\sin\theta = \sin\alpha$ன் ஒரு வடிவம் இங்கு $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$; $n \in Z$

(ii) $\sec\theta = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

θன் முதன்மை மதிப்பு $[0, \pi]$க்குள் இருக்க வேண்டும்.

cos θ என்பது குறை எண்ணாக இருப்பதால் θன் முதன்மை மதிப்பு இரண்டாவது கால்பகுதியில் அமையும்.

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4} \;;\; n \in Z$$

(iii) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ என்பது அறிந்ததே.

$$= 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore 2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \;;\; n \in Z$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3} \;;\; n \in Z$$

(iv) $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta \Rightarrow 1 + 3 = \mathrm{cosec}^2\theta$

என்பது நமக்குத் தெரியும்

$$\therefore \mathrm{cosec}^2\theta = 4 \text{ or } \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \;;\; n \in Z$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6} \;;\; n \in Z$$

(v) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad ; \quad n \in Z$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad ; \quad n \in Z$$

குறிப்பு : *தீர்* : $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

இதற்கு இரண்டு தீர்வுகள் $0 \le \theta < 2\pi$*ல் உண்டு.*

அதாவது $\theta = -\frac{\pi}{3}$ and $\frac{4\pi}{3}$

பொதுத் தீர்வு

$$\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) \; ; \; n \in Z \text{ எனவும் } \quad \ldots (1)$$

$$\text{மற்றும் } \theta = n\pi + (-1)^n\left(\frac{4\pi}{3}\right) \; ; n \in Z \text{ எனவும் } \quad \ldots (2)$$

எடுத்துக்கொண்டாலும் மதிப்பு ஒன்றுதான். வடிவம் மட்டும் வேறானது.

இங்கு (1), (2) *ம் சமமானவை. ஆனால் பார்ப்பதற்கு வேறானவையாகத் தோன்றும்.*

எடுத்துக்காட்டாக $n = 1$ எனில் (1)லிருந்து $\theta = \frac{4\pi}{3}$

$n = 0$ எனில் (2)லிருந்து $\theta = \frac{4\pi}{3}$

பொதுத்தீர்வை வரையறை செய்யும்போது θ*ன் குறைந்த மட்டு மதிப்பை* α*ன் மதிப்பாக (முதன்மை மதிப்பு) எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.*

எ.கா. 6.43: *தீர்* : $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$

தீர்வு :

$$2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{-1}{2} \quad (\because \sin\theta = 2 \text{ is not possible})$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad \theta = n\pi + (-1)^n . \left(-\frac{\pi}{6}\right) \;\; ; \; n \in Z$

எ.கா. 6.44: *தீர்*: $2\tan\theta - \cot\theta = -1$

தீர்வு : $2\tan\theta - \cot\theta = -1$

$2\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} = -1$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta + \tan\theta - 1 = 0$

$(2\tan\theta - 1)(\tan\theta + 1) = 0$

$2\tan\theta - 1 = 0$ or $\tan\theta + 1 = 0$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$ or $\tan\theta = -1$

$\tan\theta = -1$ *என்றிருக்கும் போது* $= -\tan\frac{\pi}{4}$

$\tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta = n\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= n\pi - \frac{\pi}{4} \;\; ; \; n \in Z$

$\tan\theta = \frac{1}{2} = \tan\beta$ (β-*முதன்மை மதிப்பு*)

$\therefore \; \theta = n\pi + \beta$

$= n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

எனவே $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$ or $\theta = n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; $n \in Z$

எ.கா. 6.45: *தீர்* : $\sin 2x + \sin 6x + \sin 4x = 0$

தீர்வு : $\sin 2x + \sin 6x + \sin 4x = 0$ or $(\sin 6x + \sin 2x) + \sin 4x = 0$

அல்லது $2\sin 4x . \cos 2x + \sin 4x = 0$

$\sin 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0$

$\sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = n\pi$ or $x = \frac{n\pi}{4}$; $n \in Z$

$2\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{-1}{2}$

$= -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ or $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

எனவே $x = \frac{n\pi}{4}$ or $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$

எ.கா. 6.46: *தீர்* : $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

தீர்வு : $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

$\therefore \sin^2 2x = 2 - 2\sin^2 x$

$= 2(1 - \sin^2 x)$

$\sin^2 2x = 2\cos^2 x$

$\Rightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x - 2\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x)\cos^2 x - \cos^2 x = 0$

$\Rightarrow 2\cos^4 x - \cos^2 x = 0$

$\Rightarrow \cos^2 x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos^2 x = 0$	$\cos^2 x = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
$\Rightarrow \cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{2}$	$\cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $n \in Z$	$x = m\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $m \in Z$

எ.கா. 6.47: *தீர்* : $\tan^2\theta + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta + \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan\theta(\tan\theta + 1) - \sqrt{3}(\tan\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta + 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = -1$	$\tan\theta = \sqrt{3}$
$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$	$m\pi + \frac{\pi}{3}$, $m \in Z$

6.4.3 a cosθ+b sinθ = c என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல். இங்கு $c^2 \le a^2 + b^2$

(Solving equation of the form a cosθ + b sinθ = c where $c^2 \le a^2 + b^2$)

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \qquad \ldots (1)$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ ஆல் இருபுறமும் வகுக்க

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ and $\cos\beta = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என எடுக்க

சமன்பாடு (1) $\cos\theta\ \cos\alpha + \sin\theta\ \sin\alpha = \cos\beta$

$$\Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = \cos\beta$$

$$\Rightarrow \theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \alpha \pm \beta,\ n \in Z$$

எ.கா. 6.48: *தீர்* : $\sqrt{3}\ \sin x + \cos x = 2$

தீர்வு : *இது* $a\cos x + b\sin x = c$, *இங்கு* $c^2 \le a^2 + b^2$ *என்ற வடிவில் உள்ளது.*

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$ *அல்லது* 2*ஆல் சமன்பாட்டை வகுக்க*

நமக்கு $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\dfrac{\pi}{3}\ .\ \sin x + \cos\dfrac{\pi}{3}\ .\ \cos x = 1$

அதாவது $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm 0$$

$$\text{i.e.} \quad x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, \quad n \in Z$$

பயிற்சி 6.7

(1) *கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளில் முதன்மை மதிப்புகளைக் காண்க:*

(i) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $2\cos\theta - 1 = 0$ (iii) $\sqrt{3}\ \cot\theta = 1$

(iv) $\sqrt{3}\ \sec\theta = 2$ (v) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (vi) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(vii) $\sec x = 2$

(2) கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வைக் காண்க :

(i) $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ (iii) $\cos 3\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(3) கீழ்க்காண்பவைகளைத் தீர் :

(i) $\sin 3x = \sin x$ (ii) $\sin 4x + \sin 2x = 0$ (iii) $\tan 2x = \tan x$

(4) கீழ்க்காண்பவைகளைத் தீர்:

(i) $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$ (ii) $\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 0$

(iii) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ (iv) $\sin 2x + \sin 4x = 2\sin 3x$

(5) கீழ்க்காண்பவைகளைத் தீர் :

(i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ (ii) $\sin\theta - \cos\theta = -\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt{2}\sec\theta + \tan\theta = 1$ (iv) $\mathrm{cosec}\theta - \cot\theta = \sqrt{3}$

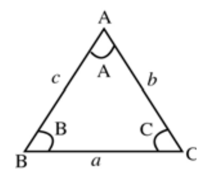
6.5 முக்கோணத்தின் பண்புகள் (Properties of Triangles) :

முக்கோணம் ABCயை எடுத்துக் கொள்வோம்.

A, B, C என்பவை மூன்று கோணங்கள்.

A, B, C என்ற கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்கள் முறையே a, b, c எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே a = BC, b = CA, c = AB.



படம். 6.21

முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் மூன்று கோணங்களைக் கொண்டு நாம் பல சூத்திரங்களை உருவாக்கலாம்.

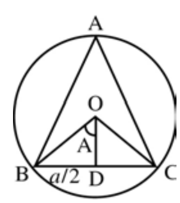
I. சைன் சூத்திரம் :

முக்கோணம் ABCல் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. இங்கு R என்பது முக்கோணம் ABCன் சுற்றுவட்ட ஆரம்.

படம் (6.22)ல் O என்பது முக்கோணம் ABCன் சுற்றுவட்ட மையம். Rஎன்பது சுற்றுவட்டத்தின் ஆரம். OD என்பது BCக்கு செங்குத்து.

இப்போது BC = a, BD = $\frac{a}{2}$

இப்போது ΔBOC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம்.



படம் 6.22

$\angle BOC = 2\angle BAC = 2A$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \angle BOD = A$

செங்கோண ΔBODல்

$$\sin A = \frac{BD}{R} = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore 2R \sin A = a \text{ or } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

இதேபோன்று $\quad \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ என நிறுவலாம்

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

II. நேப்பியரின் சூத்திரம் :

முக்கோணம் ABCல்

(1) $\tan \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b} \cot \dfrac{C}{2}$

(2) $\tan \dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c} \cot \dfrac{A}{2}$

(3) $\tan \dfrac{C-A}{2} = \dfrac{c-a}{c+a} \cot \dfrac{B}{2}$ என்பவை உண்மை ஆகும்.

மேற்கண்டவை நேப்பியரின் சூத்திரங்கள் எனப்படும்.

முடிவு (1): $\tan \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b} \cot \dfrac{C}{2}$

நிரூபணம்: சைன் சூத்திரத்திலிருந்து

$$\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \frac{2R \sin A - 2R \sin B}{2R \sin A + 2R\sin B} \cot \frac{C}{2}$$

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} \cot \frac{C}{2}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \cot \frac{C}{2}$$

$$= \cot \left(\frac{A+B}{2}\right) \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$= \cot \left(90 - \frac{C}{2}\right) \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$= \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A-B}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

இதேபோன்று முடிவுகள்(2) மற்றும் (3)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

III. கொசைன் சூத்திரம் :

வழக்கமான குறியீடுகளில் ΔABCல் கீழ்க்காணும் முடிவுகள் உண்மை ஆகும்.

முடிவுகள்:

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

இவைகள் கொசைன் சூத்திரங்கள் எனப்படும்.

முடிவு (1): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

நிரூபணம் :

ABக்கு செங்குத்தாக CD வரைக

$$a^2 = BC^2 = CD^2 + BD^2$$

$$= (AC^2 - AD^2) + (AB - AD)^2$$

$$= AC^2 - AD^2 + AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$$

$$= AC^2 + AB^2 - 2AB \times (AC\cos A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

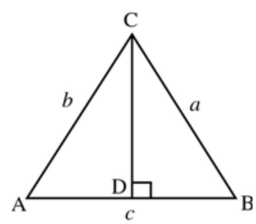


Fig. 6.23

இதேபோன்று முடிவுகள் (2) மற்றும் (3)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

கொசைன் சூத்திரங்களை கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} ; \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} ; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

IV. வீழல் சூத்திரங்கள் :

முக்கோணம் ABCல்

(1) $a = b\cos C + c\cos B$ (2) $b = c\cos A + a\cos C$ (3) $c = a\cos B + b\cos A$

என்பவை வழக்கமான குறியீடுகளில் உண்மை ஆகும். இவை வீழல் சூத்திரங்கள் எனப்படும்.

முடிவு (1): $a = b \cos C + c \cos B$

நிரூபணம் :

முக்கோணம் ABCல், AD என்பது BCக்கு செங்குத்து.

செங்கோண முக்கோணங்கள் ABD, ADCயிலிருந்து,

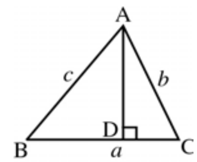


Fig. 6.24

$$\cos B = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \times \cos B$$

$$\cos C = \frac{DC}{AC} \Rightarrow DC = AC \times \cos C$$

ஆனால் $BC = BD + DC = AB \cos B + AC \cos C$

$a = c \cos B + b \cos C$

அல்லது $a = b \cos C + c \cos B$

இதேபோன்று முடிவுகள் (2) மற்றும் (3) ஐ நிரூபிக்கலாம்.

V. அரைக்கோண சூத்திரங்கள் :

முக்கோணம் ABCல் கீழ்க்காணும் முடிவுகள் உண்மை ஆகும்.

(1) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ (2) $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

(3) $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ (4) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(5) $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ (6) $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(7) $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ (8) $\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

(9) $\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

இங்கு $s = \frac{a+b+c}{2}$

மேற்கண்ட முடிவுகள் அரைக்கோண சூத்திரங்கள் எனப்படும்.

முடிவு (1): $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

நிரூபணம் : $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$$

A வை $\frac{A}{2}$ என்று மாற்றி எழுத $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

$$= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2b)}{2bc}$$

$$= \frac{(2s - 2c)(2s - 2b)}{2bc} \qquad \because a + b + c = 2s$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s - c)\,2(s - b)}{2bc}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s - b)(s - c)}{bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}$$

$\frac{A}{2}$ ஒரு குறுங்கோணம் என்பதால் $\sin\frac{A}{2}$ எப்போதும் ஒரு மிகை எண்.

ஆகவே $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}$$

இதே போன்று சைனுடன் தொடர்புடைய சூத்திரங்கள் (2) மற்றும் (3)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

முடிவு (4): $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}$$

நிரூபணம் : $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$$

A என்பதை $\frac{A}{2}$ என மாற்றி எழுத $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$

$$= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c + a - 2a)}{2bc} = \frac{2s(2s - 2a)}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s \times 2(s-a)}{2bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

இதே போன்று கொசைனுடன் தொடர்புடைய சூத்திரங்கள் (5) மற்றும் (6)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

***முடிவு* (7):** $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

***நிரூபணம்* :** $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

இதே போன்று tan உடன் தொடர்புடைய சூத்திரங்கள் (8) மற்றும்(9)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

VI.*பரப்புச்சூத்திரங்கள்*(Δ*என்பது முக்கோணத்தின் பரப்பைக் குறிக்கிறது*) :

முக்கோணம் ABCல்

(1) $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$ (2) $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$ (3) $\Delta = \frac{1}{2} ca \sin B$

(4) $\Delta = \frac{abc}{4R}$ (5) $\Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ (6) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

என்பவைகள் வழக்கமான குறியீடுகளில் உண்மை ஆகும். இவைகள் பரப்புச் சூத்திரங்கள் எனப்படும்.

***முடிவு* (1):** $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

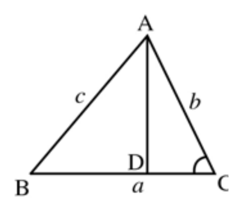
***நிரூபணம்* :**

BCக்கு செங்குத்தாக AD வரைக

Δ = முக்கோணம் ABCன் பரப்பு

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin C$

$= \frac{1}{2} ab \sin C$ [$\because \sin C = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \times \sin C$]



படம் 6.25

இதேபோன்று முடிவுகள் (2) மற்றும் (3)ஐ நிரூபிக்கலாம்.

***முடிவு* (4):** $\Delta = \dfrac{abc}{4R}$

***நிரூபணம்* :**

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ab \sin C \text{ என்பது நமக்குத் தெரியும்}$$

$$= \frac{1}{2}\, ab \frac{c}{2R} \qquad \because \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$= \frac{abc}{4R}$$

***முடிவு* (5):** $\Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

***நிரூபணம்* :**

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ab \sin C \text{ என்பது நமக்குத் தெரியும்}$$

$$= \frac{1}{2}\, 2R \sin A\, 2R \sin B \sin C \qquad (\because a = 2R \sin A$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C \qquad b = 2R \sin B)$$

***முடிவு* (6) :** $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *என நிறுவுக*

***நிரூபணம்* :**

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ab \sin C \text{ என்பது நமக்குத் தெரியும்}$$

$$= \frac{1}{2}\, ab\, 2\sin\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2}$$

$$= ab \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

எ.கா. 6.49: ABCல் $a \sin A - b \sin B = c \sin(A - B)$ *என நிறுவுக.*

***தீர்வு* :** *சைன் சூத்திரத்தின்படி*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\therefore a = 2R \sin A,\quad b = 2R \sin B,\quad c = 2R \sin C$

$$\begin{aligned} a \sin A - b \sin B &= 2R\sin A \sin A - 2R \sin B \sin B \\ &= 2R(\sin^2 A - \sin^2 B) \\ &= 2R \sin(A + B) \sin(A - B) \\ &= 2R \sin(180 - C) \sin(A - B) \\ &= 2R \sin C \sin(A - B) \\ &= c \sin(A - B) \end{aligned}$$

எ.கா. 6.50: $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :

சைன் சூத்திரத்தின்படி $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{(2R\sin A)^2-(2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2}$$

$$= \frac{4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 B}{4R^2\sin^2 C} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 C} \qquad [\sin C = \sin(A+B)]$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2(A+B)} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$$

எ.கா. 6.51: $\sum a\sin(B-C) = 0$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு :

$$\sum a\sin(B-C) = a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B)$$

$$= 2R\sin A\sin(B-C) + 2R\sin B\sin(C-A) + 2R\sin C\sin(A-B)$$

$$\sin A = \sin(B+C),\ \sin B = \sin(C+A)\ ;\ \sin C = \sin(A+B)$$

$$= 2R\sin(B+C)\sin(B-C) + 2R\sin(C+A)\sin(C-A) + 2R\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$= 2R[\sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= 0$$

எ.கா. 6.52: $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2} = \frac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin A}\sin\frac{A}{2}$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{\sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{180 - A}{2}\right) \cos \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin \left(90 - \frac{A}{2}\right) \cos \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \cos \frac{B - C}{2} \qquad \because \sin\left(90 - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

எ.கா. 6.53: ABCல்

$$\frac{a^2 \sin (B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = 0$$ *என நிறுவுக.*

தீர்வு : $\frac{a^2 \sin (B - C)}{\sin A} = \frac{(2R \sin A)^2 \sin(B - C)}{\sin A} = \frac{4R^2 \sin^2 A \sin (B - C)}{\sin A}$

$$= 4R^2 \sin A \sin(B - C) = 4R^2 \sin(B + C) \sin(B - C)$$

$$= 4R^2 (\sin^2 B - \sin^2 C) = 4R^2 \sin^2 B - 4R^2 \sin^2 C$$

$$= b^2 - c^2$$

இதேபோன்று $\frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} = c^2 - a^2$

$\frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = a^2 - b^2$ *எனக் காட்டலாம்.*

$$\therefore \frac{a^2 \sin (B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C}$$

$$= b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2$$

$$= 0$$

பயிற்சி 6.8

முக்கோணம் ABCல் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

(1) $a^2 = (b + c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + (b - c)^2 \cos^2 \frac{A}{2}$

(2) $\sum a(b^2 + c^2) \cos A = 3abc$

(3) $\sum a(\sin B - \sin C) = 0$

(4) $\sum (b + c) \cos A = a + b + c$

(5) $a^3 \sin(B - C) + b^3 \sin(C - A) + c^3 \sin(A - B) = 0$

(6) $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

(7) $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

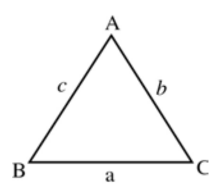
(8) $\dfrac{\tan A}{\tan B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$

(9) $a \cos A = b \cos B$ எனில் ΔABC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் அல்லது செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக.

6.6 முக்கோணங்களின் தீர்வுகள் (Solution of triangles) :

ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் உண்டு என்பது நமக்குத் தெரியும். இவ்வாறாக ஒரு முக்கோணம் ஆறு பாகங்களைக் கொண்டது. முக்கோணம் ABCயை எடுத்துக் கொள்வோம். வழக்கமான குறியீடுகளில் a, b, c என்பவை முக்கோணத்தின் பக்கங்களையும், A, B, C என்பவைகள் முக்கோணத்தின் கோணங்களையும் குறிக்கின்றன.

ஒரு முக்கோணத்தின் தெரியாத பாகங்களைக் கண்டுபிடிக்கும் செய்முறையை முக்கோணங்களின் தீர்வுகள் காணல் என்கிறோம். ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பாகங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மற்ற பாகங்களை நம்மால் கண்டுபிடிக்க முடியும். (தரப்பட்ட மூன்று பாகங்களில் ஒன்றாவது ஒரு பக்கமாக இருக்க வேண்டும்)



படம் 6.26

இங்கு கீழ்க்கண்ட மூன்று வகையான தீர்வு காணலைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

1) மூன்று பக்கங்கள் (SSS)

2) ஒரு பக்கம் இரண்டு கோணங்கள் (SAA)

3) ஏதேனும் இரண்டு பக்கம், அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் (SAS)

வகை I: ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன (SSS) மற்ற பாகங்களைக் காணல் :

இந்த வகை கணக்குகளை கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் ஒரு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கலாம்.

(a) கொசைன் சூத்திரம் (b) சைன் சூத்திரம் (c) அரைக்கோண சூத்திரம்

ஒரு முக்கோணத்தின் தரப்பட்ட பாகங்களின் அளவுகள் சிறிய எண்களாக இருந்தால் கொசைன் சூத்திரத்தையும், அளவுகள் பெரியதாக இருந்தால் அரைக் கோண சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்தித் தீர்ப்பது நல்லது.

எ.கா. 6.54: $a = 8$, $b = 9$¸ $c = 10$ என்பது முக்கோணம் ABCன் பக்க அளவுகள் எனில் முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் காண்க.

***தீர்வு* :** Aஎன்ற கோணத்தைக் காண கொசைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{81 + 100 - 64}{180} = \frac{117}{180}$$

$$A = 49° \, 28'$$

இதேபோன்று

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{100 + 64 - 81}{160} = \frac{83}{160}$$

$$B = 58° \, 51'$$

ஆனால் $A + B + C = 180°$

$$\therefore C = 180° - (49° \, 28' + 58° \, 51')$$

$$= 71° \, 41'$$

ஆகவே $A = 49° \, 28'$, $B = 58° \, 51'$, $C = 71° \, 41'$

***குறிப்பு* :** மேற்கண்ட கணக்கில் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் அளவுகள் சிறியனதாக இருந்ததால் கொசைன் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டது.

எ.கா. 6.55: $a = 31$, $b = 42$, $c = 57$ எனில் முக்கோணத்தின் எல்லா கோணங்களையும் காண்க.

***தீர்வு* :**

முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் அளவுகள் பெரியதாக இருப்பதால் அரைக்கோண சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$$s = \frac{a + b + c}{2} = 65$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \left(\frac{23 \times 8}{65 \times 34}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \log \left[\tan \frac{A}{2}\right] = \frac{1}{2} [\log 23 + \log 8 - \log 65 - \log 34]$$

$$= \frac{1}{2}\ [1.3617 + 0.9031 - 1.8129 - 1.5315]$$

$$= \frac{1}{2}\ [-1.0796] = \frac{1}{2}\ [-2 + 0.9204]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overline{2} + 0.9204\right] = \overline{1}.4602$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{2} = 16° 6' \Rightarrow A = 32° 12'$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \left(\frac{8 \times 34}{65 \times 23}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \log\left[\tan\frac{B}{2}\right] = \frac{1}{2}\ [\log 8 + \log 34 - \log 65 - \log 23]$$

$$= \frac{1}{2}\ [-0.7400] = \frac{1}{2}\ [-2 + 1.2600]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overline{2} + 1.2600\right] = \overline{1}.6300$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B}{2} = 23° 6' \Rightarrow B = 46° 12'$$

$$C = 180 - (A + B) = 101° 36'$$

எனவே $A = 32° 12' \quad B = 46° 12' \quad C = 101° 36'$

வகை II: ஒரு பக்கமும் ஏதேனும் இரண்டு கோணங்களும் தரப்பட்டால் (SAA) முக்கோணத்தின் மற்ற பாகங்களைக் காணல் :

இந்த வகை முக்கோணத்தைத் தீர்க்க சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

எ.கா. 6.56: முக்கோணம் ABCல், A = 35° 17′, C = 45° 13′, b = 42.1 எனில் முக்கோணத்தைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

காணவேண்டிய பாகங்கள் B, a, c

$B = 180 - (A + C) = 180 - (35° 17' + 45° 13')$

$= 99° 30'$

பக்கங்களைக் காண சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

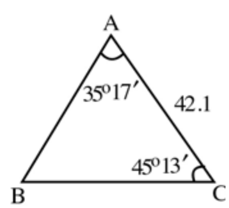


Fig. 5.27

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{42.1 \times \sin 35° \, 17'}{\sin 99° \, 30'}$$

$$\log a = \log 42.1 + \log \sin 35° \, 17' - \log \sin 99° \, 30'$$

$$= 1.6243 + \bar{1}.7616 - \bar{1}.9940$$

$$= 1.3859 - \bar{1}.9940$$

$$= 1.3859 - [-1 + 0.9940] = 1.3919$$

$$\Rightarrow \quad a = 24.65$$

Again $$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{42.1 \times \sin 45° \, 13'}{\sin 99' \, 30'}$$

$$\log c = \log 42.1 + \log \sin 45° \, 13' - \log \sin 99° \, 30'$$

$$= 1.6243 + \bar{1}.8511 - \bar{1}.9940$$

$$= 1.4754 - \bar{1}.9940$$

$$= 1.4754 - [-1 + 0.9940] = 1.4814$$

$$\Rightarrow \quad c = 30.3$$

ஆகவே $B = 99° \, 30'$, $a = 24.65$, $c = 30.3$

வகை III: ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணமும் (SAS) கொடுக்கப்பட்டால், மற்ற பாகங்களைக் காணல் :

இரண்டு பக்கமும் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணமும் கொடுக்கப்பட்டால் கொசைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மூன்றாவது பக்கத்தைக் கண்டுபிடித்துவிடலாம். பின்பு சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மற்ற இரண்டு கோணங்கயையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எ.கா. 6.57: முக்கோணம் ABCல் $a = 5$, $b = 4$, $C = 68°$.

தீர்வு :

cஐக் காண, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$c^2 = 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \cos 68°$$

$$= 41 - 40 \times 0.3746 = 26.016$$

$$c = 5.1$$

மற்ற இரண்டு கோணங்களைக் காண சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$\Rightarrow \quad \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{4 \times \sin 68°}{5.1}$$

$$\log \sin B = \log 4 + \log \sin 68^\circ - \log 5.1$$

$$= 0.6021 + \overline{1}.9672 - .7075$$

$$= 0.5693 - 0.7075 = -0.1382$$

$$= \overline{1}.8618$$

$$B = 46^\circ 40'$$

$$\Rightarrow \quad A = 180 - (B + C) = 180 - (114^\circ 40')$$

$$= 65^\circ 20'$$

ஆகவே $\quad B = 46^\circ 40', \; A = 65^\circ 20', \; c = 5.1$

***குறிப்பு* :** A, B என்ற கோணங்களைக் காண நேப்பியர் சூத்திரம்

$$\tan \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{C}{2}$$ ஐக் கூட பயன்படுத்தலாம்.

6.7 நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள் :

(Inverse Trigonometrical functions)

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, … என்பனவைகளை நேர்மாறு வட்டச்சார்புகள் அல்லது நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் என்கிறோம். **$\sin^{-1}x$ *என்பது ஒரு கோணம்* θ *ஆகும். அதன் சைனின் மதிப்பு* x *ஆகும்.*** இதேபோன்று $\cos^{-1}x$ என்பத ஒரு கோணம் θஆகும். அதன் கொசைன் மதிப்பு x ஆகும். ஒரு நேர்மாறு வட்டச் சார்பின் முதன்மை மதிப்பு (Principal value) என்பது பொது மதிப்புகளில் எண்ணளவில் சிறியது. இது மிகை அல்லது குறை எண்ணாக இருக்கலாம். ஒரு நேர்மாறு வட்டச் சார்புக்கு ஒன்று மிகை, மற்றொன்று குறைமதிப்பாக இருந்து எண்ணளவில் சமமெனில், மிகை எண்தான் முதன்மை மதிப்பு ஆக எடுத்துக்கொள்ளப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{3}$ ஆகும். $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ஆக இருந்தாலும், முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{3}$ ஆகாது.

***குறிப்பு* :**

$\sin^{-1}x$ என்பது $(\sin x)^{-1}$ என்பதற்கு மாறானது. $\sin^{-1}x$ என்பது நேர்மாறு வட்டச் சார்பு. $(\sin x)^{-1}$ என்பது $\frac{1}{\sin x}$ ஆகும்.

நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் சார்பகம் (Domain), வீச்சு (Range) ஆகியவற்றின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	சார்பு	சார்பகம்	வீச்சு (முதன்மை மதிப்பு)
1.	$y = \sin^{-1}x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
2.	$y = \cos^{-1}x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
3.	$y = \tan^{-1}x$	R	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
4.	$y = \text{cosec}^{-1}x$	$x \ge 1$ or $x \le -1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $y \ne 0$
5.	$y = \sec^{-1} x$	$x \ge 1$ or $x \le -1$	$0 < y \le \pi$; $y \ne \frac{\pi}{2}$
6.	$y = \cot^{-1} x$	R	$0 < y < \pi$

அட்டவணை 6.6

எ.கா. 6.58: *கீழ்க்காண்பவைகளின் முதன்மை மதிப்பு காண்க :*

(i) $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (iv) $\sin^{-1}(-1)$

(v) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (vi) $\text{cosec}^{-1}(-2)$

தீர்வு :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y$ என்க. இங்கு $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

எனவே $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$ என்க. இங்கு $0 < y < \frac{\pi}{2}$,

$\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y \Rightarrow \sec y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$

(iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = y$ என்க. இங்கு $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = y \Rightarrow \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = \frac{-\pi}{6}$

$\therefore \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{-\pi}{6}$

(iv) $\sin^{-1}(-1) = y$ என்க. இங்கு $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}(-1) = y \Rightarrow \sin y = -1$

$-1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin^{-1}(-1)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{2}$

(v) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$ என்க. இங்கு $0 \le y \le \pi$, then

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2}$

$\cos y = -\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos y = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{2\pi}{3}$

(vi) $\mathrm{cosec}^{-1}(-2) = y$ என்க. இங்கு $-\frac{\pi}{2} \le y < 0$

$\mathrm{cosec}^{-1}(-2) = y \Rightarrow \mathrm{cosec}\, y = -2 = \mathrm{cosec}\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow y = \frac{-\pi}{6}$

$\therefore \mathrm{cosec}^{-1}(-2)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{-\pi}{6}$

எ.கா. 6.59:

(i) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ எனில் $\cos\theta$ன் மதிப்பு காண்க.

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}x$ எனில் xன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

(i) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{7} \therefore \tan\theta = 7$

$$\Rightarrow \quad \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} \;=\; \sqrt{1+49}$$

$$\sec\theta = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

(ii) $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{6} \quad \therefore\ \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \quad x = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பண்புகள் :

(Properties of inverse Trigonometric functions)

பண்பு (1) :

(i) $\sin^{-1}(\sin x) = x$ (ii) $\cos^{-1}(\cos x) = x$ (iii) $\tan^{-1}(\tan x) = x$

(iv) $\cot^{-1}(\cot x) = x$ (v) $\sec^{-1}(\sec x) = x$ (vi) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\, x) = x$

நிரூபணம் :

(i) $\sin x = y$ *என்க,* *எனவே* $x = \sin^{-1}(y)$ … (1)

$\therefore\ x = \sin^{-1}(\sin x)$ by (1)

இதேபோல மற்ற முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம்.

பண்பு (2):

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}x$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}x$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}x$ (iv) $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}x$

(v) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}x$ (vi) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}x$

நிரூபணம் :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta \;\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{1}{x}$ *என்க*

$$\Rightarrow \quad \text{cosec}\,\theta = x$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \text{cosec}^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}x$$

இதேபோன்று மற்ற முடிவுகளையும் நிறுவலாம்.

பண்பு (3):

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ (ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

(iii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$ (iv) $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}x$

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$ (vi) $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}x$

நிரூபணம் :

(i) $\sin^{-1}(-x) = \theta$ *என்க.* $\therefore -x = \sin\theta$

$\Rightarrow x = -\sin\theta$

$x = \sin(-\theta)$

$\Rightarrow -\theta = \sin^{-1}x$

$\Rightarrow \theta = -\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

(ii) $\cos^{-1}(-x) = \theta$ *என்க.* $\Rightarrow -x = \cos\theta$

$\Rightarrow x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\Rightarrow \pi - \theta = \cos^{-1}x$

$\Rightarrow \theta = \pi - \cos^{-1}x$

$\Rightarrow \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

இதே போன்று மற்ற முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம்.

***பண்பு* (4):**

(i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (iii) $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

***தீர்வு* :**

(i) $\sin^{-1}x = \theta$ *என்க* $\Rightarrow x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\Rightarrow \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\Rightarrow \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

இதே போன்று (ii) *மற்றும்* (iii)*ஐ நிரூபிக்கலாம்.*

***பண்பு* (5):**

$xy < 1$, *எனில்* $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

***தீர்வு* :** $\tan^{-1}x = \theta_1$, $\tan^{-1}y = \theta_2$ *என்க.*

எனவே then $\tan\theta_1 = x$ and $\tan\theta_2 = y$

$$\Rightarrow \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 . \tan\theta_2} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

குறிப்பு : *இதேபோன்று* $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$ *எனக் காட்டலாம்*

பண்பு (6): $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right]$

தீர்வு :

$\theta_1 = \sin^{-1}x$ *மற்றும்* $\theta_2 = \sin^{-1}y$ *எனவும் கொள்க*

எனவே $\sin\theta_1 = x$ *மற்றும்* $\sin\theta_2 = y$

$$\Rightarrow \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

$$= \left(\sin\theta_1\sqrt{1 - \sin^2\theta_2} + \sqrt{1 - \sin^2\theta_1}\,\sin\theta_2\right)$$

$$= \left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right]$$

எ.கா. 6.60:

நிறுவுக (i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\frac{2}{9}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$

தீர்வு :

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{13}}{1 - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

(ii) $\cos^{-1}\frac{4}{5} = \theta$ $\cos\theta = \frac{4}{5}$ *என்க.* $\therefore$ $\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\cos^{-1}\frac{4}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$$\therefore \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}\right\} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$$

எ.கா. 6.61: $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}\right)$ *என நிறுவுக*

***தீர்வு* :**

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\left[\frac{x+y}{1-xy}\right] + \tan^{-1}z$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1-\dfrac{(x+y)z}{1-xy}} = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy}}{\dfrac{1-xy-xz-yz}{1-xy}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]$$

எ.கா. 6.62: *தீர்* $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \dfrac{\pi}{4}$

$$\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{2x+3x}{1-6x^2}\right] = \tan^{-1}(1)$$

$$\therefore \frac{5x}{1-6x^2} = 1 \Rightarrow 1-6x^2 = 5x \ \therefore 6x^2+5x-1=0$$

அ.து. $(x+1)(6x-1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ or } \dfrac{1}{6}$

x-ன் குறைமதிப்பை எடுத்துக் கொண்டால் வலப்புறம் குறை எண்ணாகும். எனவே x*ன் குறைமதிப்பு ஒதுக்கப்படுகிறது.* $\therefore x = \dfrac{1}{6}$

எ.கா. 6.63:

மதிப்பைக் காண்க :

(i) $\sin\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$ (ii) $\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ (iii) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$

***தீர்வு* :**

(i) $\cos^{-1}\dfrac{3}{5} = \theta$ *என்க. எனவே* $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

$$\therefore \sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

(ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \theta$ *என்க. எனவே* $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$

$$\therefore \cos\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) = \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{4}{5}$$

(iii) $\cos^{-1}\frac{4}{5} = \theta$ என்க. எனவே $\cos\theta = \frac{4}{5}$

$$\sin\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{4}{5}\right] = \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

எ.கா. 6.64: *மதிப்பைக் காண்க :* $\cos\left[\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right]$

தீர்வு :

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} = A \text{ என்க } \therefore \sin A = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}$$

$$\sin^{-1}\frac{5}{13} = B \text{ என்க } \therefore \sin B = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos B = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \cos\left[\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right] = \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$= \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right) = \frac{33}{65}$$

பயிற்சி 6.9

(1) *கீழ்க்காண்பவைகளின் முதன்மை மதிப்பு காண்க.*

(i) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\text{cosec}^{-1}(-1)$

(iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ (v) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (vi) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2) *நிறுவுக :*

(i) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ (ii) $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$

(3) *மதிப்பைக் காண்க :*

(i) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$ (ii) $\cos\left[\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

(iii) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right)$ (iv) $\sin\left[\cos^{-1}\frac{1}{2}\right]$

(4) *நிறுவுக :*

(i) $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right] = \frac{x}{2}$ (ii) $\cos^{-1}(2x^2-1) = 2\cos^{-1}x$

(iii) $\tan^{-1}\left[\dfrac{3x - x^3}{1- 3x^2}\right] = 3\tan^{-1}x$ (iv) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right) = 2\sin^{-1}x$

(5) $2\tan^{-1}\dfrac{2}{3} = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right)$ என நிறுவுக.

(6) $\tan^{-1}\left(\dfrac{m}{n}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{m - n}{m + n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ என நிறுவுக

(7) தீர் : $\tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x - 2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

(8) தீர் $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right) + \cot^{-1}\left(\dfrac{1 - x^2}{2x}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, இங்கு $x > 0$

(9) தீர் : $\tan^{-1}(x + 1) + \tan^{-1}(x - 1) = \tan^{-1}\dfrac{4}{7}$

(10) கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக :

(i) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}\right]$

(ii) $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2}\right]$

(iii) $\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1 - x^2} . \sqrt{1 - y^2}\right]$

குறிக்கோள் வினாக்கள்

ஏற்புடைய விடையினை எடுத்தெழுதுக.

(1) B = [1 2 5 7] *என்ற அணியின் வரிசை*

(1) 1×4 (2) 4×1 (3) 2×1 (4) 1×1

(2) 2×3 *வரிசையுடைய ஒரு அணியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை*

(1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 6

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, X + A = 0 *எனில்* X *என்பது*

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $[7 \ 5 \ 3]\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$-*ன் பெருக்கல்*

(1) [70] (2) [49] (3) [15] (4) 70

(5) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ *என்ற அணியானது*

(1) *திசையிலி அணி* (2) *மூலைவிட்ட அணி*

(3) *அலகு அணி* (4) *மூலைவிட்ட மற்றும் திசையிலி அணி*

(6) $[2 \ \ x \ \ -1]\begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 3 \end{bmatrix} = [13]$ *எனில்* x-*ன் மதிப்பு*

(1) 5 (2) 2 (3) ± 3 (4) ± 4

(7) A, B *என்ற அணிகளின் வரிசைகள் முறையே* 2×3, 3×2 *எனில்* BA-*யின் வரிசை*

(1) 3×3 (2) 2×3 (3) 2×2 (4) 3×2

(8) $[3 \ \ -1 \ \ 2]B = [5 \ \ 6]$ *எனில்,* B-*ன் வரிசை*

(1) 3×1 (2) 1×3 (3) 3×2 (4) 1×1

(9) *கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் உண்மையான கூற்றுகள்*

(i) ஒவ்வொரு அலகு அணியும் திசையிலி அணியாகும். ஆனால் திசையிலி அணியானது அலகு அணியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

(ii) ஒவ்வொரு திசையிலி அணியும் ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகும். ஆனால் மூலைவிட்ட அணி திசையிலி அணியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

(iii) ஒவ்வொரு மூலைவிட்ட அணியும் ஒரு சதுர அணியாகும். ஆனால் சதுர அணி ஒரு மூலைவிட்ட அணியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

(1) (i), (ii), (iii) (2) (i), (ii) (3) (ii), (iii) (4) (iii), (i)

(10) $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணி

(1) மேல் முக்கோண அணி (2) கீழ் முக்கோண அணி

(3) சதுர அணி (4) பூச்சிய அணி

(11) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ -ல் 2-ன் சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) – 3

(12) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ -ல் – 7-ன் இணைக்காரணியின் மதிப்பு

(1) – 18 (2) 18 (3) – 7 (4) 7

(13) $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $|A| = 2$ எனில் $|3A|$-ன் மதிப்பு

(1) 54 (2) 6 (3) 27 (4) – 54

(14) ஒரு மூன்று வரிசை அணிக்கோவையில் a_{23} என்ற உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவையும், இணைக்காரணியும் சமம் எனில் அதன் சிற்றணிக் கோவையின் மதிப்பு

(1) 1 (2) Δ (3) $-\Delta$ (4) 0

(15) $\begin{vmatrix} 2x & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$-ன் தீர்வு

(1) $x = 1$ (2) $x = 2$ (3) $x = 3$ (4) $x = 0$

(16) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) xyz (3) $x + y + z$ (4) 0

(17) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ எனில் $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

(1) Δ (2) $-\Delta$ (3) 3Δ (4) -3Δ

(18) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ -ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 5 (3) 10 (4) -10

(19) A என்பது 3 வரிசையுடைய சதுர அணி எனில் $|kA|$ என்பது

(1) $k|A|$ (2) $-k|A|$ (3) $k^3|A|$ (4) $-k^3|A|$

(20) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ எனில்

(1) $\Delta_1 = 2\Delta$ (2) $\Delta_1 = 4\Delta$ (3) $\Delta_1 = 8\Delta$ (4) $\Delta = 8\Delta_1$

(21) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 10 & 6 & 16 \end{vmatrix}$ எனில்

(1) $\Delta_1 = -2\Delta_2$ (2) $\Delta_2 = -2\Delta_1$ (3) $\Delta_1 = 2\Delta_2$ (4) $\Delta_1 = -2\Delta_2$

(22) Δ என்ற அணிக்கோவையில் $x = -a$ என்ற பிரதியிடலுக்கு இரு நிரைகள் சர்வ சமம் எனில், Δ-ன் ஒரு காரணி

(1) $x + a$ (2) $x - a$ (3) $(x + a)^2$ (4) $(x - a)^2$

(23) $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix}$ -ன் ஒரு காரணி

(1) $x + 2$ (2) $x - 3$ (3) $2x - 1$ (4) $x + 3$

(24) Δ என்ற 3 வரிசை அணிக்கோவையில் $x = a$ என்ற பிரதியிடலுக்கு 3 நிரல்களும் சர்வசமம் எனில், Δ-ன் ஒரு காரணி

(1) $x - a$ (2) $x + a$ (3) $(x - a)^2$ (4) $(x + a)^2$

(25) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் ஒரு காரணி

(1) x (2) $x + b$ (3) $x + c$ (4) $x - a + b + c$

(26) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}^2$ -ன் மதிப்பு

(1) abc (2) 0 (3) $a^2b^2c^2$ (4) $-abc$

(27) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ என்ற பெருக்கலின் மதிப்பு

(1) 56 (2) – 56 (3) – 1 (4) – 63

(28) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ மற்றும் A_1, B_1, C_1 …… என்பவை முறையே a_1, b_1, c_1 …… ஆகியவற்றின் இணைக்காரணிகள் எனில்

$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 =$

(1) Δ (2) 0 (3) $-\Delta$ (4) Δ^2

(29) ஒரு 3 வரிசையுள்ள அணிக்கோவையின் மதிப்பு 11 எனில் அதன் இணைக்காரணிகளைப் பயன்படுத்தி எழுதும் அணிக்கோவையின் மதிப்பு

(1) 11 (2) 121 (3) 1331 (4) 0

(30) $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் ஒரு காரணி

(1) $x + y$ (2) $a + b$ (3) $x - y$ (4) $a + b + c$

(31) A என்ற புள்ளியின் நி.வெ.

$2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ எனில் B-ன் நி.வெ.

(1) $7\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$ (2) $7\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$

(3) $7\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}$ (4) $-7\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}$

(32) $\vec{a}$ ஒரு பூச்சியமல்லா வெக்டர், $\left|k\vec{a}\right| = 1$ எனும்போது k என்ற திசையிலியின் மதிப்பு

(1) $\left|\vec{a}\right|$ (2) 1 (3) $\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}$ (4) $\pm\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}$

(33) ABCDEF என்ற ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் அடுத்தடுத்த இருபக்கங்களான $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ யினை முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$ எனக் குறிப்பிட்டால் $\overrightarrow{EF}$ என்பது

(1) $\vec{a} - \vec{b}$ (2) $\vec{a} + \vec{b}$ (3) $2\vec{a}$ (4) $-\vec{b}$

(34) $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ எனில் (k ஒரு திசையிலி)

(1) A, B, C ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள்

(2) A, B, C ஒரே தள புள்ளிகள்

(3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ -ன் எண்ணளவைகள் சமம்

(4) A, B, C ஆகியவை ஒரே புள்ளியைக் குறிக்கிறது

(35) A, B என்ற புள்ளிகளின் நி.வெ. $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்க. AB-ஐ P என்ற புள்ளி 3 : 1. என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. Q என்பது AP.யின் நடுப்புள்ளி எனில் Q-ன் நி.வெ.

(1) $\frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{8}$ (2) $\frac{3\vec{a} + 5\vec{b}}{2}$ (3) $\frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$ (4) $\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$

(36) ABC என்ற முக்கோணத்தின் G என்பது நடுச்சந்தி. O என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில் $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} =$

(1) $\vec{O}$ (2) $\overrightarrow{OG}$ (3) $3\,\overrightarrow{OG}$ (4) $4\,\overrightarrow{OG}$

(37) ABC என்ற முக்கோணத்தில் G நடுச்சந்தி எனில் $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} =$

(1) $3\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$ (2) $\overrightarrow{OG}$ (3) $\vec{O}$ (4) $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

(38) ABC, A′ B′ C ′ ஆகிய முக்கோணங்களின் நடுச்சந்திகள் முறையே G, G′ எனில் $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} =$

(1) $\overrightarrow{GG'}$ (2) $3\overrightarrow{GG'}$ (3) $2\overrightarrow{GG'}$ (4) $4\overrightarrow{GG'}$

(39) $-2\vec{i} - 3\vec{j}$ என்ற வெக்டரின் தொடக்கப்புள்ளி (− 1, 5, 8) எனில் முடிவுப்புள்ளியின் நி.வெ.

(1) $3\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$ (2) $-3\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$

(3) $-3\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$ (4) $3\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$

(40) $\vec{i} - 2\vec{j}$ என்ற வெக்டரின் திசைக்கு இணையான வெக்டர்

(1) $-\vec{i} + 2\vec{j}$ (2) $2\vec{i} + 4\vec{j}$ (3) $-3\vec{i} + 6\vec{j}$ 4) $3\vec{i} - 6\vec{j}$

(41) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, எனில் $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ -க்கு இணையான ஓரலகு வெக்டர்

(1) $\frac{\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$ (2) $\frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$ (4) $\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$

(42) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ எனில் $\vec{a} + \vec{b}$ -ன் மட்டு

(1) 13 (2) 13/3 (3) 3/13 (4) 4/13

(43) P, Q-ன் நி.வெ. $2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ எனில் $\overrightarrow{PQ}$ -ன் திசைக் கொசைன்கள்

(1) $\frac{2}{\sqrt{161}}, \frac{-6}{\sqrt{161}}, \frac{11}{\sqrt{161}}$ (2) $\frac{-2}{\sqrt{161}}, \frac{-6}{\sqrt{161}}, \frac{-11}{\sqrt{161}}$

(3) 2, − 6, 11 (4) 1, 2, 3

(44) $\frac{ax}{(x+2)(2x-3)} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{2x-3}$ எனில் $a =$

(1) 4 (2) 5 (3) 7 (4) 8

(45) $nPr = 720\, nCr$ எனில் $r =$

(1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 7

(46) 'ENGINEERING' என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துகளை மாற்றி அமைத்து எழுதப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(1) 11! (2) $\frac{11!}{(3!)^2 (2!)^2}$ (3) $\frac{11!}{3! . 2!}$ (4) $\frac{11!}{3!}$

(47) இலக்கங்கள் 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0 ஆகியவற்றை மீண்டும் பயன்படுத்தாதவாறு உருவாக்கும் 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை

(1) 720 (2) 840 (3) 280 (4) 560

(48) ஒரு எண் கோணத்தின் (octagon) உச்சிப்புள்ளிகளை இணைத்து கிடைக்கும் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை

(1) 28 (2) 48 (3) 20 (4) 24

(49) ஒரு பல கோணத்திற்கு 44 மூலைவிட்டங்கள் உள்ளதெனில் அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை

(1) 11 (2) 7 (3) 8 (4) 12

(50) ஒரு விருந்திற்கு 20 பேர் அழைக்கப்பட்டுள்ளனர். இதில் குறிப்பிட்ட இருவர், விருந்து கொடுப்பவருக்கு இரு பக்கத்திலும் அமருமாறு எல்லோரும் வட்ட வடிவமாக உட்கார உள்ள வழிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 18! 2! (2) 18! 3! (3) 19! 2! (4) 20! 2!

(51) n ஒரு மிகை முழு எண்ணானால் $(x + a)^n$-ன் விரிவாக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) n (2) $n - 1$ (3) $n + 1$ (4) $n + 2$

(52) $nC_0 - nC_1 + nC_2 - nC_3 + \ldots (-1)^n . nCn$-ன் மதிப்பு

(1) 2^{n+1} (2) n (3) 2^n (4) 0

(53) $(1 - x)^{10}$-ன் விரிவாக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் குணகங்களின் கூடுதல்

(1) 0 (2) 1 (3) 10^2 (4) 1024

(54) $(1 + x)^{24}$-ன் விரிவாக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் குணகங்களின் மிகப்பெரியது

(1) ${}_{24}C_{24}$ (2) ${}_{24}C_{13}$ (3) ${}_{24}C_{12}$ (4) ${}_{24}C_{11}$

(55) $\left[(a + b)^2\right]^{18}$-ன் விரிவாக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 11 (2) 36 (3) 37 (4) 35

(56) ஈருறுப்பு குணகங்களின் கூடுதல்

(1) $2n$ (2) n^2 (3) 2^n (4) $n + 17$

(57) $\left(2+\sqrt{3}\right)^8$ -ன் கடைசி உறுப்பு

(1) 81 (2) 27 (3) $\sqrt{3}$ (4) 3

(58) a, b, c என்பவை A.P.யில் இருந்தால் 3^a, 3^b, 3^c என்பவை ...... தொடரில் இருக்கும்.

(1) A.P. (2) G.P. (3) H.P. (4) A.P. மற்றும் G.P.

(59) ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையின் nவது உறுப்பு $(2n - 1)$ எனில் n-வரையிலான கூடுதலின் மதிப்பு

(1) $n^2 - 1$ (2) $(2n - 1)$ (3) n^2 (4) $n^2 + 1$

(60) ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையின் n வரையிலான உறுப்புகளின் கூடுதல் n^2 எனில், பொது வித்தியாசம்

(1) 2 (2) -2 (3) ± 2 (4) 1

(61) $1 + 2 + 3 \ldots \ldots \ldots$ என்ற தொடரின் முதல் 25 உறுப்புகளின் கூடுதல்

(1) 305 (2) 325 (3) 315 (4) 335

(62) $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots \ldots \ldots$ என்ற தொடரில் nவது உறுப்பு

(1) $4n - 1$ (2) $n^2 + 2n$ (3) $(n^2 + n + 1)$ (4) $(n^3 + 2)$

(63) 5, 13, 29 ஆகிய எண்களை எந்த எண்ணால் கூட்டினால் அவை G.P-ன் உறுப்புகளாக மாறும்?

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

(64) ஒரு G.P.-யில் 3வது உறுப்பு 5, எனில் முதல் 5 உறுப்புகளின் பெருக்கல்

(1) 25 (2) 625 (3) 3125 (4) 625×25

(65) ஒரு G.P.யின் முதல் உறுப்பு 1. மூன்றாவது மற்றும் 5-வது உறுப்புகளின் கூடுதல் 90 எனில் அதன் பொது விகிதம்

(1) ± 2 (2) $\sqrt{10}$ (3) ± 3 (4) -3

(66) ஒரு G.P.ன் உறுப்புகளை வலமிருந்து இடமாக மாற்றக் கிடைக்கும் தொடர் முறை

(1) A.P. (2) G.P. (3) H.P. (4) A.P. and H.P.

(67) A, G, H என்பவை முறையே A.M., G.M., H.M. எனில்

(1) $A > G > H$ (2) $A < G > H$ (3) $A < G < H$ (4) $A > G < H$

(68) இரு எண்களுக்கு இடையே உள்ளA.M. 5 ஆகவும் G.M. 4 ஆகவும் இருப்பின் H.M.

(1) $3\frac{1}{5}$ (2) 1 (3) 9 (4) $1\frac{1}{4}$

(69) a, b, c என்பவை A.P. ஆகவும் G.P. ஆகவும் இருப்பின்

(1) $a = b \neq c$ (2) $a \neq b = c$ (3) $a \neq b \neq c$ (4) $a = b = c$

(70) a, b ஆகியவற்றின் A.M., G.M. மற்றும் H.M. ஆகியவை சமமாக இருப்பின்

(1) $a = b$ (2) $ab = 1$ (3) $a > b$ (4) $a < b$

(71) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \ldots$ என்பது எந்த மதிப்புகளுக்கு உண்மை.

(1) $-1 < x < 1$ (2) $-1 \leq x \leq 1$ (3) எல்லா மெய்யெண்கள் x (4) $x > 0$

(72) $e^{\log x}$-ன் மதிப்பு

(1) x (2) 1 (3) e (4) $\log_e x$

(73) x-அச்சின் சமன்பாடு

(1) $x = 0$ (2) $x = 0, y = 0$ (3) $y = 0$ (4) $x = 4$

(74) $2x - 3y + 1 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(1) $\frac{-2}{3}$ (2) $\frac{-3}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

(75) $3x + 2y - 1 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் y –வெட்டுத் துண்டு

(1) 2 (2) 3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$

(76) கீழ்க்காண்பவைகளின் எதன் y-வெட்டுத்துண்டின் நீளம் அதிகமாக உள்ளது?

(1) $2x + 3y = 4$ (2) $x + 2y = 3$ (3) $3x + 4y = 5$ (4) $4x + 5y = 6$

(77) $y = \sqrt{3}\ x + 4$ என்ற நேர்க்கோடு x-அச்சின் மீது ஏற்படுத்தும் கோணம் (இடஞ்சுழியாக)

(1) 45° (2) 30° (3) 60° (4) 90°

(78) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தெனில்,

(1) $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2}$ (2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (3) $a_1 a_2 = -b_1b_2$ (4) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(79) $3x + 4y + 5 = 0$ என்ற நேர்க்கோடானது கீழ்க்காணும் எந்த நேர்க்கோட்டிற்கு இணையானது?

(1) $4x + 3y + 6 = 0$ (2) $3x - 4y + 6 = 0$

(3) $4x - 3y + 9 = 0$ (4) $3x + 4y + 6 = 0$

(80) கீழ்க்காணும் எந்த நேர்க்கோடு $x + y = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்துமல்ல, இணையுமல்ல?

(1) $y = x$ (2) $y - x + 2 = 0$ (3) $2y = 4x + 1$ (4) $y + x + 2 = 0$

(81) $4x - 2y = 3$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதும் $(-2, 1)$ என்ற புள்ளியையும் உடைய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $y = 2x + 5$ (2) $y = 2x - 1$ (3) $y = x - 2$ (4) $y = \frac{1}{2}x$

(82) இரண்டு இணைகோடுகளின் சமன்பாடுகள் எந்த உறுப்பின் மூலம் வேறுபடுகிறது?

(1) x-உறுப்பு (2) y-உறுப்பு (3) மாறிலி உறுப்பு (4) xy-உறுப்பு

(83) ஒரு கோட்டின் சாய்வு $\frac{2}{3}$ எனில் அதன் செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

(84) $xy = 0$ என்பதன் வரைபடமானது

(1) ஒரு புள்ளி

(2) ஒரு நேர்க்கோடு

(3) ஒரு சோடி வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்க்கோடுகள்

(4) ஒரு சோடி இணை நேர்க்கோடுகள்

(85) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டையுடைய சோடியான நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில்

(1) $ab = 0$ (2) $a + b = 0$ (3) $a - b = 0$ (4) $a = 0$

(86) $h^2 = ab$ ஆக இருக்கும்போது $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$-ஐ சமன்பாடாகக் கொண்ட சோடி நேர்க்கோடுகளின் இடையே உள்ள கோணத்தின் அளவு

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $0°$

(87) $2x^2 + 3yx - cy^2 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு சோடி செங்குத்துக் கோடுகளின் சமன்பாடாயின், $c =$

(1) -2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\frac{1}{2}$

(88) $2x^2 + kxy + 4y^2 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு சோடி இணைக்கோடுகளின் சமன்பாடுகளாயின், $k =$

(1) ± 32 (2) $\pm 2\sqrt{2}$ (3) $\pm 4\sqrt{2}$ (4) ± 8

(89) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு சோடி நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடாக இருக்க வேண்டிய நிபந்தனை

(1) $abc + 2fgh - bf^2 - ag^2 - ch^2 = 0$ (2) $abc - 2fgh - ag^2 - bf^2 - ch^2 = 0$

(3) $abc + 2fgh - ah^2 - bg^2 - cf^2 = 0$ (4) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

(90) (2, 1)-ஐ மையப்புள்ளியாகவும் (– 2, 1) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் விட்டம்

(1) 4 (2) 8 (3) $4\sqrt{5}$ (4) 2

(91) $x^2 + y^2 + ax + by - 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டையுடைய வட்டத்தின் மையப்புள்ளி (1, – 1) எனில் அதன் ஆரம்

(1) 3 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{11}$ (4) 11

(92) (0, 0)-ஐ மையப்புள்ளியாகவும் (5, 0) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாடு

(1) $x^2 + y^2 - 10x = 0$ (2) $x^2 + y^2 = 25$

(3) $x^2 + y^2 + 10x = 0$ (4) $x^2 + y^2 - 10y = 0$

(93) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினையுடைய வட்டத்தின் ஆரம்

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(94) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினையுடைய வட்டத்தின் மையப்புள்ளி

(1) (2, 4) (2) (1, 2) (3) (– 1, 2) (4) (– 2, – 4)

(95) $2x + 3y = 0$, $3x - 2y = 0$ என்பவை ஒரு வட்டத்தின் இரண்டு விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் எனில் அதன் மையப்புள்ளி

(1) (1, – 2) (2) (2, 3) (3) (0, 0) (4) (– 3, 2)

(96) $y = 2x - c$ என்ற கோடு $x^2 + y^2 = 5$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எனில் $c =$

(1) ± 5 (2) $\pm\sqrt{5}$ (3) $\pm 5\sqrt{5}$ (4) $\pm 5\sqrt{2}$

(97) (4, 5) என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = 25$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

(1) 5 (2) 4 (3) 25 (4) 16

(98) ஓர் அலகு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திற்கு x, y அச்சுகள் தொடுகோடுகளாக அமையுமாயின், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு

(1) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ (2) $x^2 + y^2 = 1$

(3) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (4) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

(99) $x^2 + y^2 - 4x+2y - 5=0$ என்ற சமன்பாட்டினையுடைய வட்டத்தினுள் உள்ள புள்ளி

(1) (5, 10) (2) (– 5, 7) (3) (9, 0) (4) (1, 1)

(100) ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(101) இரண்டு வட்டங்கள் (r_1, r_2-ஆரமுடைய) வெளிப்புறமாக ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டால் அவற்றின் மையப்புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தூரம்

(1) $r_1 - r_2$ (2) $\frac{r_1}{r_2}$ (3) $\frac{r_2}{r_1}$ (4) $r_1 + r_2$

(102) இரண்டு வட்டங்கள் உட்புறமாக எத்தனை புள்ளிகளில் தொட்டுக் கொள்ளும்?

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 3

(103) ஒரு ரேடியன் என்பது (பாகையில்)

(1) $\frac{180^\circ}{11}$ (2) $\frac{\pi}{180^\circ}$ (3) $\frac{180}{\pi}$ (4) $\frac{11}{180^\circ}$

(104) 0°லிருந்து – 90° வரையிலான கோணங்களின் முடிவுப்பக்கம் இருக்கும் கால்பகுதி

(1) முதல் கால் பகுதி (2) மூன்றாம் கால் பகுதி

(3) நான்காம் கால் பகுதி (4) இரண்டாம் கால் பகுதி

(105) ஒரு முழுச்சுற்றில் $\frac{1}{360}$ பகுதியை வலப்பக்கமாக கணக்கிட்டால் கிடைப்பது

(1) – 1° (2) – 360° (3) – 90° (4) 1°

(106) முடிவுப்பக்கமும் தொடக்கப்பக்கமும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் எதிர்த்திசையில் அமைந்தால் அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம்

(1) 0° (2) 90° (3) 180° (4) 270°

(107) முக்கோணம் ABC-யின் பரப்பளவு

(1) $\frac{1}{2}$ ab cosC (2) $\frac{1}{2}$ ab sinC (3) $\frac{1}{2}$ ab cosC (4) $\frac{1}{2}$ bc sinB

(108) $s(s-a)(s-b)(s-c)$ =

(1) Δ (2) Δ^2 (3) 2Δ (4) $\frac{\Delta}{s}$

(109) ABC என்ற முக்கோணத்தில், Δ =

(1) abc (2) $\frac{abc}{4R}$ (3) $\frac{abc}{2R}$ (4) $\frac{abc}{R}$

(110) ABC என்ற முக்கோணத்திற்கு, sinA sinB sinC =

(1) $\frac{\Delta}{2R}$ (2) $\frac{\Delta}{4R}$ (3) $\frac{\Delta}{2R^2}$ (4) $\frac{\Delta}{4R^2}$

(111) cosB =

(1) $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ (2) $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$ (3) $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ (4) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

(1) (i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $x = 0,\ y = 7,\ z = 3$ (3) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $z = 1$, $w = \frac{1}{2}$

(4) (i) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 14 & -16 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 18 & -7 \end{bmatrix}$

(6) $X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ (8) $k = 1$

(10) $x = 1, -3$ (11) $x = 2, -5$ (13) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (14) $x = 1, y = 4$

பயிற்சி 1.2

(1) 0 (2) (i) *பூச்சியமில்லா அணி* (ii) *பூச்சிய அணி*

(3) (i) $x = \frac{27}{8}$ (ii) $x = 9$ (4) (i) 0 (ii) 0 (6) $a^3 + 3a^2$

பயிற்சி 1.3

(3) $x = 0, 0, -(a + b + c)$ (4) $(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca)$

பயிற்சி 2.1

(1) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$

பயிற்சி 2.2

(1) $5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$, $5\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{185}$

(3) $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$; $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}$;

$\overrightarrow{CA} = -\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$

AB = $\sqrt{35}$, BC = $\sqrt{114}$, CA = $\sqrt{69}$

(5) $m = 9$ (6) $\dfrac{\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}}{2}$ (7) $\pm \dfrac{3\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{94}}$

(8) $\pm \dfrac{17\vec{i} - 3\vec{j} - 10\vec{k}}{\sqrt{398}}$ (12) $2\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$

(13) $\overrightarrow{PQ} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}$; $\left(\dfrac{4}{9\sqrt{2}}, \dfrac{-5}{9\sqrt{2}}, \dfrac{11}{9\sqrt{2}}\right)$

(16) ஒரே தள வெக்டர்கள் அல்ல.

பயிற்சி 3.1

(1) $\dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$ (2) $\dfrac{20}{x-3} - \dfrac{13}{x-2}$

(3) $\dfrac{3}{2(x-1)} - \dfrac{7}{x-2} + \dfrac{13}{2(x-3)}$ (4) $\dfrac{1}{9(x+1)} - \dfrac{1}{9(x+2)} - \dfrac{1}{3(x+2)^2}$

(5) $\dfrac{-4}{9(x+2)} + \dfrac{4}{9(x-1)} - \dfrac{1}{3(x-1)^2}$ (6) $\dfrac{2}{25(x-2)} + \dfrac{3}{5(x-2)^2} - \dfrac{2}{25(x+3)}$

(7) $\dfrac{-7}{2x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{2(x+2)}$ (8) $\dfrac{2}{(x-2)} + \dfrac{3}{(x-2)^2} - \dfrac{9}{(x-2)^3}$

(9) $\dfrac{1}{5(x+2)} + \dfrac{4x-8}{5(x^2+1)}$ (10) $\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{(x-3)}{2(x^2+1)}$

(11) $\dfrac{x-5}{x^2-2x-1} + \dfrac{4}{3x-2}$ (12) $1 - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

பயிற்சி 3.2

(1) 378 (2) 42 (3) 600 (4) 1320 (5) 42840

(6) 512 (7) 153 (8) (i) 27216 (ii) 90000 (9) $5 \times 5!$ (10) 21

(11) 2^5 (12) 9000 (13) (i) 125 (ii) 60 (14) 2^5

பயிற்சி 3.3

(1) (i) 60 (ii) 2730 (iii) 120 (iv) $\dfrac{25!}{5!}$ (v) 15120

(2) 23 (3) 4

(4) 41 (7) 172800 (8) 5040 (9) 60 (10) 93324 (11) 34650

(12) (i) 840 (ii) 20 (13) 9000 (14) 4^5 (15) (i) 8! (ii) 7! (16) $\frac{19!}{2}$

பயிற்சி 3.4

(1) (i) 45 (ii) 4950 (iii) 1 (2) 23 (3) 3 (4) 45

(5) (i) 12 (ii) 8 (6) 19 (7) 7

பயிற்சி 3.5

(1) 66 (2) 200 (3) 210 (4) 425 (5) (i) ${}_{15}C_{11}$ (ii) ${}_{14}C_{10}$ (iii) ${}_{14}C_{11}$

(6) 780 (7) (i) 40 (ii) 116 (8) 1540 (9) 817190

பயிற்சி 3.7

(1) (i) $243a^5 + 2025a^4b + 6750a^3b^2 + 11250a^2b^3 + 9375ab^4 + 3125\,b^5$

(ii) $a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$

(iii) $32x^5 - 240x^6 + 720x^7 - 1080x^8 + 810x^9 - 243x^{10}$

(iv) $x^{11} + \frac{11x^{10}}{y} + \frac{55x^9}{y^2} + \frac{165x^8}{y^3} + \frac{330x^7}{y^4} + \frac{462x^6}{y^5} + \frac{462x^5}{y^6} + \frac{330x^4}{y^7} + \frac{165x^3}{y^8} + \frac{55x^2}{y^9} + \frac{11x}{y^{10}} + \frac{1}{y^{11}}$

(v) $x^{12} + 12x^{10}y^3 + 60x^8y^6 + 160x^6y^9 + 240x^4y^{12} + 192x^2y^{15} + 64y^{18}$

(vi) $x^4y^2 + 4x^{7/2}\,y^{3/2} + 6x^3y^3 + 4x^{5/2}y^{7/2} + x^2\ y^4$

(2) (i) $58\sqrt{2}$ (ii) 152 (iii) 352

(iv) $128a^3 + 4320a^2 + 9720a + 1458$ (v) $5822\sqrt{3}$

(3) (i) 1030301 (ii) 970299 (4) 0.9940

(5) (i) $8C_4\, 2^4x^{12}$ (ii) $16C_8$ (iii) $\frac{16C_8\,.a^8}{x^4}$

(iv) $13C_6\,.2^6x^7y^6$ and $-\,13C_7\,.\,2^7x^6y^7$ (v) $17C_8.2^8\frac{1}{x^7}$ and $17C_9.2^9\frac{1}{x^{10}}$

(7) $-\,165$ (8) (i) 7920 (ii) 2268 (iii) ${}_{12}C_4\left(\frac{b}{c}\right)^4 9^8$ (9) $r = 3$ (10) 7, 14

பயிற்சி 4.1

(1) (i) 25, – 125, 625, – 3125 மற்றும் 15625 (ii) $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{21}{2}$, 21, $\frac{75}{2}$

(iii) – 1, – 12, – 23, – 34, – 45 (iv) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$

(v) $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$ (vi) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{16}{81}$, $\frac{25}{243}$

(2) (i) $\frac{11}{5}$, $\frac{15}{7}$ (ii) 1, 0 (iii) $\frac{64}{7}$, $\frac{121}{10}$ (iv) 64, -512

(3) 0, $\frac{5}{2}$, 8, $\frac{17}{2}$, 24, $\frac{37}{2}$

(4) (i) 2, 2, 1, 0, -1 (ii) 1, 2, 3, 5, 8 (iii)1, 2, 6, 24, 120 (iv) 1, 1, 5, 13, 41

(5) $\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3^n}\right]$ (6) $\frac{5}{4}\ [5^n-1]$ (7) $\frac{1}{2^{200}}\ (2^{100}-1)$

பயிற்சி 4.2

(1) (i) 4, 7, 10, 13, 16 (ii) 5, 7, 9, 11, 13, 15 (2) (i) 10 (ii) 1 (iii) p

(4) $\frac{1}{19}$ (6) 6, 24 (10) 2, 3, 6 (or) 6, 3, 2

பயிற்சி 4.3

(1) (i) $\frac{1}{x^5}\left[x-8+\frac{40}{x}-\frac{160}{x^2}+\ldots\right]$ (ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\left[1+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{18}+\frac{7x^3}{324}+\ldots\right]$

(2) (i) 10.01 (ii) 0.02 (5) $\frac{11.9.7.5}{4!}\ x^{12}$

(6) $\frac{(r+1)\ (r+2)\ (r+3)}{1.2.3}\ x^r$

பயிற்சி 5.1

(1) $x^2+y^2-2x+8y-19=0$ (2) $3x+y=2$

(3) (i) $t=1$ (ii) P(1, 2) (4) $y^2-24x^2=0$

(7) (i) $x^2+y^2+x-3y+2=0$ (ii) $15x^2+15y^2+66x-96y+207=0$

பயிற்சி 5.2

(1) $4x-7y-10=0$ (2) $y=3x+4$ (3) $x-y=6$

(4) $11x-y=27$ (5) $2x+y=6$; $x+2y=6$ (6) $x+3y=8$

(7) $3x-2y=0$; $2x-y=0$ மற்றும் $5x-3y=0$ (8) $\frac{14}{\sqrt{13}}$ அலகுகள்

(9) $2x-3y+12=0$ (10) $9x-8y+10=0$; $2x-y=0$

(11) $2x-3y=6$; $3x-2y=6$

(12) x-வெட்டுத்துண்டு $\frac{6}{7}$; y- வெட்டுத்துண்டு2

(13) (8, 0) மற்றும் (– 2, 0) (14) $3\sqrt{2}$ அலகுகள்

பயிற்சி 5.3

(1) $\frac{\pi}{4}$ (3) $3x + 2y + 1 = 0$ (4) $x - y - 1 = 0$ (5) (1, 2)

(6) $k = -9$ (7) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ அலகுகள் (8) $p = 1$; $p = 2$ (9) $28x + 7y - 74 = 0$

(10) $5x + 3y + 8 = 0$ (11) $x + y = 1$ (12) $5x + 3y + 5 = 0$ (14) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$

(17) $a = 5$ (18) $a = \frac{16}{9}$ (19) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ (21) (1, 12) (22) (– 4, – 3)

பயிற்சி 5.4

(1) $a = 2$; $c = -3$ (2) $\pi/3$ (4) 1 (6) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$

(7) $3x^2 + 7xy + 2y^2 - 4x + 7y - 15 = 0$

(8) $k = -1$; $4x - 3y + 1 = 0$ மற்றும் $3x + 4y - 1 = 0$; $\pi/2$

(9) $C = 2$; $6x - 2y + 1 = 0$ மற்றும் $2x - y + 2 = 0$; $\tan^{-1}(1/7)$

(10) $k = -10$; $3x - 2y + 1 = 0$ மற்றும் $4x + 5y + 3 = 0$

பயிற்சி 5.5

(1) (i) (0, 0) ; 1 (ii) (2, 3) ; $\sqrt{22}$ (iii) (4, 3) ; 7

(iv) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (v) (4, 4) ; $\sqrt{10}$

(2) $a = 4$; $b = 2$; $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$ (3) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$

(4) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ (5) $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 42 = 0$

(6) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 25 = 0$ (7) $2\sqrt{10}\ \pi$ அலகு;10π ச.அலகுகள்

(8) $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$; $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$

(9) $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ (10) $x^2 + y^2 = 1$

(11) $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$ (12) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

(13) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ (14) $16x^2 + 16y^2 = 1$

(15) $x = \frac{3}{2}\cos\theta$; $y = \frac{3}{2}\sin\theta$

பயிற்சி 5.6

(1) $2\sqrt{5}$ அலகுகள் (3) $y - 1 = 0$ (4) வெளியே

(5) (0, 0), (4, – 3) உள்ளே உள்ளன; (– 2, 1) வெளியே உள்ளது

(6) (0, 2) ; (2, 0) (7) $2x + y = \pm 3\sqrt{5}$ (8) $5\sqrt{2}$ அலகுகள்

(9) (i) $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 25 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$

(10) $4x + 3y + 6 = 0$ (11) (i) $x + y = \pm 4\sqrt{2}$ (ii) $x - y = \pm 4\sqrt{2}$

(12) $x - 5y + 19 = 0$ (13) ± 40 (14) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$

பயிற்சி 5.7

(3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 39 = 0$ (4) $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 49 = 0$

(6) (i) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$

(7) $x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$ (8) $3x^2 + 3y^2 - 14x + 23y - 15 = 0$

பயிற்சி 6.1

(1) (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{5\pi}{9}$ (iii) $\frac{10\pi}{9}$ (iv) $\frac{-16\pi}{9}$ (v) $\frac{-17\pi}{36}$ (vi) $\frac{\pi}{24}$

(2) (i) $22° 30'$ (ii) $648°$ (iii) $-171°48'$ (app.) (iv) $105°$

(3) (i) Q_1 (ii) Q_3 (iii) Q_1

பயிற்சி 6.2

(1) $\frac{-1331}{276}$ (2) (i) $-\sin 60°$ (ii) $-\cos 40°$ (iii) $\tan 10°$ (iv) $-\tan 60°$

(v) $\operatorname{cosec} 60°$ (vi) $-\sin 30°$ (vii) $\cos 30°$

(5) (i) $-\operatorname{cosec} A$ (ii) $-\sec A$ (iii) $-\cot A$ (iv) $\cos A$ (v) $\tan A$

(8) (i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}$ (iv) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (v) -1 (vi) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vii) 1 (viii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(10) (i) $\frac{13}{3}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ (v) 5 (vi) 2 (vii) $\frac{7}{3}$

(viii) 11 (ix) $\frac{25}{12}$ (x) $\frac{149}{120}$

பயிற்சி 6.4

(1) (i) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (ii) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (iii) $2 + \sqrt{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (ii) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(12) $\sqrt{2} + 1$ (14) $\frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{2}}{12}$

பயிற்சி 6.5

(3) $\frac{1}{2}$ (6) (i) $\frac{9}{13}$ (ii) $\frac{117}{125}$

பயிற்சி 6.6

(1) (i) $\sin 6\theta + \sin 2\theta$ (ii) $\cos 14\theta + \cos 2\theta$ (iii) $\sin 10\theta - \sin 4\theta$

(iv) $\cos 2A - \cos 4A$ (v) $\sin 9A - \sin 3A$ (vi) $\frac{1}{2}[\sin 13\theta + \sin 5\theta]$

(vii) $\frac{1}{2}[\sin 2A - \sin A]$ (viii) $\frac{1}{2}[\sin 6A + \sin A]$ (ix) $\frac{1}{2}[\cos 3\theta + \cos \theta/3]$

(2) (i) $2\sin 9A \cos 4A$ (ii) $2\cos 9A \sin 4A$ (iii) $2\cos 9A \cos 4A$

(iv) $-2\sin 9A \sin 4A$ (v) $2\cos 42° \sin 10°$ (vi) $2\cos 37° \cos 14°$

(vii) $2\cos 50° \sin 30°$ (viii) $2\sin 30° \cos 20°$ (ix) $2\sin 30° \cos 10°$

(x) $2\cos\frac{53°}{2}\cos\frac{17°}{2}$

பயிற்சி 6.7

(1) (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{6}$ (v) $-\frac{\pi}{3}$ (vi) $-\frac{\pi}{6}$ (vii) $\frac{\pi}{3}$

(2) (i) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ (ii) $n\pi - \frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$

(3) (i) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n\pi$ (ii) $\frac{n\pi}{3}$, $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (iii) $n\pi$

(4) (i) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (ii) $2n\pi \pm \pi$ (iii) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{n\pi}{3}$, $2n\pi$

(5) (i) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (or) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

(ii) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ (iii) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ (iv) $2n\pi$, $2n\pi + \frac{2\pi}{3}$

பயிற்சி 6.9

(1) (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$ (iii) $-\frac{\pi}{2}$ (iv) $\frac{3\pi}{4}$ (v) $\frac{\pi}{3}$ (vi) $\frac{3\pi}{4}$

(3) (i) $\frac{12}{13}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{15}{8}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (7) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (8) $2-\sqrt{3}$ (9) $x = \frac{1}{2}$

குறிக்கோள் வினாக்கள் - விடைகள்

(1) 1	(2) 4	(3) 2	(4) 1	(5) 2	(6) 4
(7) 1	(8) 3	(9) 1	(10) 1	(11) 1	(12) 2
(13) 1	(14) 4	(15) 1	(16) 4	(17) 2	(18) 1
(19) 3	(20) 3	(21) 2	(22) 1	(23) 4	(24) 3
(25) 1	(26) 3	(27) 2	(28) 2	(29) 2	(30) 3
(31) 1	(32) 4	(33) 4	(34) 1	(35) 1	(36) 3
(37) 3	(38) 2	(39) 2	(40) 4	(41) 4	(42) 1
(43) 1	(44) 3	(45) 1	(46) 2	(47) 1	(48) 3
(49) 1	(50) 1	(51) 3	(52) 4	(53) 1	(54) 3
(55) 3	(56) 3	(57) 1	(58) 2	(59) 3	(60) 1
(61) 2	(62) 3	(63) 2	(64) 3	(65) 3	(66) 2
(67) 1	(68) 1	(69) 4	(70) 1	(71) 3	(72) 1
(73) 3	(74) 3	(75) 3	(76) 2	(77) 3	(78) 3
(79) 4	(80) 3	(81) 1	(82) 3	(83) 4	(84) 3
(85) 2	(86) 4	(87) 3	(88) 3	(89) 4	(90) 2
(91) 3	(92) 1	(93) 3	(94) 3	(95) 3	(96) 1
(97) 2	(98) 3	(99) 4	(100) 2	(101) 4	(102) 1
(103) 3	(104) 4	(105) 1	(106) 3	(107) 2	(108) 2
(109) 2	(110) 3	(111) 1			

பார்வை நூல்கள்

(1) Calculus and Analytical Geometry,
George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.

(2) Topics in Algebra,
I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.

(3) Elementary Treatise on the Calculus,
George A. Gibson, Macmillan & Co. New York.

(4) Mathematical Analysis,
S.C. Malik, Wiley Eastern Ltd.

(5) Differential and Integral Calculus,
N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.

(6) Methods of Real Analysis,
Richard R. Goldberg, Oxford and IBH Publishing Company, New Delhi.

(7) Elementary Calculus, Vol. I,
V.I. Smirnov, Addison – Wesley Publish Company, Inc.

(8) Calculus (Volume 1 and II),
Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.

(9) Mathematical Statistics,
John E. Freund and Ronald D. Walpole, Prentice Hall of India.

(10) Mathematical Statistics,
Saxena and Kapoor

(11) Analytical Geometry, (2 Dimensional),
P. Duraipandian and others

(12) Vector Algebra,
A.R. Vasistha

(13) Trigonometry,
S.L. Loney.

(14) A Text Book of Trigonometry,
Raisingania and Aggarwal

(15) Matrices,
H.R. Swarup Sharma and H.B. Pandey

(16) Introduction to Matrices,
S.C. Gupta